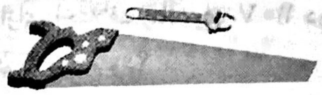
فصل

۲۱

ظرفیت

بخش ۲۱-۴ ظرفیت

•۱- دو جسم فلزی شکل ۲۱-۲۴ دارای بارهای خالص $+۷۰\text{pC}$ و -۷۰pC هستند که منجر به اختلاف پتانسیل ۲۰V بین آنها می‌شود. (الف) ظرفیت این دستگاه چقدر است؟ (ب) اگر بارها به $+۲۰۰\text{pC}$ و -۲۰۰pC تغییر داده شوند، این ظرفیت چقدر می‌شود؟ (پ) اختلاف پتانسیل چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۲۴ مسئلهٔ ۱

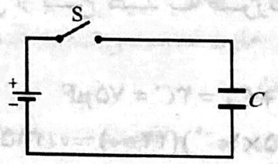
حل: (الف) ظرفیت دستگاه برابر است با:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{۷۰}{۲۰} = ۳/۵\ \text{pF}$$

(ب) ظرفیت مستقل از بار و اختلاف پتانسیل است، بنابراین ظرفیت تغییر نخواهد کرد.

(پ) $$\Delta V = \frac{q}{C} = \frac{۲۰۰}{۳/۵} = ۵۷/۱۴\text{V}$$

•۲- خازن شکل ۲۱-۲۵ دارای ظرفیت $۲۵\mu\text{F}$ و در ابتدا بدون بار است. باتری اختلاف پتانسیل ۱۲۰V را فراهم می‌کند. پس از آنکه کلید S بسته شود، چقدر بار از آن خواهد گذشت؟



شکل ۲۱-۲۵ مسئلهٔ ۲

حل: $$q = CV = (۲۵\times ۱۰^{-۶})(۱۲۰) = ۳\times ۱۰^{-۳}\ \text{C}$$

بخش ۲۱-۳ محاسبه‌ی ظرفیت

•۳- SSM یک خازن تخت دارای صفحه‌هایی دایره‌ای به شعاع ۸/۲۰cm، و فاصلهٔ صفحه‌های آن ۱/۳۰cm است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) اگر اختلاف پتانسیل ۱۲۰V بین صفحه‌ها اعمال شده باشد، چقدر بار روی صفحه‌ها ظاهر می‌شود؟

حل: (الف)

$$C = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \pi R^۲}{d} = \frac{(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۳/۱۴)(۰/۰۸۲)^۲}{۰/۰۰۱۳}$$
$$= ۱/۴۴\times ۱۰^{-۱۰}\ \text{F}$$

(ب) $$q = CV = (۱/۴۴\times ۱۰^{-۱۰})(۱۲۰) = ۱/۷۳\times ۱۰^{-۸}\ \text{C}$$

●۴- شعاع‌های صفحه‌های یک خازن کروی ۳۸/۰mm و ۴۰/۰mm است. (الف) ظرفیت این خازن را محاسبه کنید. (ب) مساحت صفحهٔ یک خازن تخت با همان فاصلهٔ صفحه‌ها و همان ظرفیت، باید چقدر باشد؟

حل (الف) برای خازن کروی داریم:

$$C=\frac{۴\pi\varepsilon_\circ ab}{b-a}=\frac{ab}{k(b-a)}$$
$$=\frac{(۴۰)(۳۸)}{(۹\times۱۰^{۹})(۴۰-۳۸)}=۸/۴۵\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{F}$$

(ب) برای خازن تخت- موازی داریم:

$$C=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{\varepsilon_\circ A}{b-a}$$
$$۸/۴۵\times۱۰^{-۱۱}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})A}{۲\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow A=۱/۹\times۱۰^{-۲}\ \mathrm{m^۲}$$

●۵- SSM فرض کنید یک قطرهٔ جیوه، کره‌ای منزوی است. ظرفیت خازنی که از ترکیب دو قطره هر یک به شعاع R=۲/۰۰mm حاصل می‌شود چقدر است؟

حل: پس از جمع شدن دو قطره، حجم کرهٔ حاصل دو برابر حجم هر قطر می‌شود.

$$V'=۲V\Rightarrow\frac{۴}{۳}\pi R'^{۳}=(۲)\left(\frac{۴}{۳}\pi R^{۳}\right)\Rightarrow R'=(۲)^{۱/۳}R$$
$$C'=۴\pi\varepsilon_\circ R'=(۴)(۳/۱۴)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲)^{۱/۳}(۲\times۱۰^{-۳})$$
$$=۲/۸\times۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

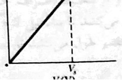
●۶- می‌خواهیم با دو صفحهٔ تخت فلزی، هر یک به مساحت ۱/۰۰m²، یک خازن تخت بسازیم. (الف) اگر ظرفیت این خازن ۱/۰۰F باشد، فاصلهٔ میان صفحه‌های آن باید چقدر باشد؟ (ب) آیا در عمل، این خازن را می‌توان ساخت؟

حل: (الف) با توجه به رابطه $C=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}$ داریم:

$$d=\frac{\varepsilon_\circ A}{C}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱)}{۱}=۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{m}$$

(ب) با توجه به مقدار d که حتی کوچکتر از اندازه یک اتم است، امکان ساخت وجود ندارد.

●۷- اگر خازن تخت (صفحه- موازی) بدون باری (با ظرفیت C) به باتری وصل شود، براثر حرکت الکترون‌ها به روی صفحه (مساحت A) یک صفحه بار منفی پیدا می‌کند. در شکل ۲۱-۲۶، عمق d که الکترون‌ها از صفحه خارج می‌شوند در یک خازن نوعی برحسب گسترهٔ مقدارهایی برای اختلاف پتانسیل V باتری رسم شده است. مقیاس قائم با d_s=۱/۰۰pm و مقیاس افقی با V_s=۲۰/۰V مشخص شده است. نسبت C/A چقدر است؟



شکل ۲۱-۲۶ مسئلهٔ ۷

حل: حجم ناحیه‌ای که الکترون‌های آن روی سطح قرار می‌گیرد برابر است با $V=Ad$ و اگر n چگالی الکترون‌های رسانا باشد، داریم

$$N=nV=nAd \quad \text{و} \quad q=Ne=nAde$$
$$C=\frac{q}{V_\circ}=\frac{nAde}{V_\circ}$$

و

$$\frac{C}{A}=\frac{nde}{V_\circ}=\frac{(۸/۵\times۱۰^{۲۸})(۱\times۱۰^{-۱۲})(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})}{۲۰}$$
$$=۶/۸\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{F/m^۲}$$

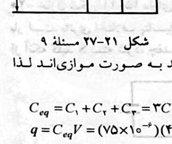
بخش ۲۱-۴ خازن‌های موازی و متوالی

●۸- SSM چند خازن با ظرفیت ۱/۰۰μF باید به طور موازی بسته شوند تا به ازای اختلاف پتانسیل ۱۱۰V در دو سرخازن‌ها، بار ۱/۰۰C در آن ذخیره شود؟

حل:

$$C_{eq}=\frac{q}{V}=\frac{۱}{۱۱۰}=۹\times۱۰^{-۳}\ \mathrm{F}$$
$$C_{eq}=nC\Rightarrow۹/۱\times۱۰^{-۳}=n(۱\times۱۰^{-۶})\Rightarrow n=۹۱۰۰$$ عدد

●۹- هر یک از خازن‌های بدون بار شکل ۲۱-۲۷ دارای ظرفیت ۲۵/۰μF است. وقتی کلید بسته شود، اختلاف پتانسیل V=۴۲۰۰V برقرار می‌گردد. چند کولن بار از سنجهٔ A می‌گذرد؟



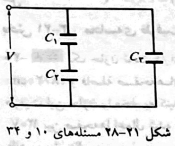
شکل ۲۱-۲۷ مسئلهٔ ۹

حل: سه خازن پس از بستن کلید به صورت موازی‌اند لذا داریم:

$$C_{eq}=C_۱+C_۲+C_۳=۳C=۷۵\mu\mathrm{F}$$
$$q=C_{eq}V=(۷۵\times۱۰^{-۶})(۴۲۰۰)=۰/۳۱۵$$

همین بار از سنجه A می‌گذرد.

●۱۰- در شکل ۲۱-۲۸، ظرفیت معادل ترکیب را پیدا کنید. فرض کنید $C_۱$ برابر ۱۰/۰μF، $C_۲$ برابر ۵/۰۰μF، و $C_۳$=۴/۰۰μF است.

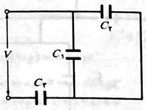


شکل ۲۱-۲۸ مسئله‌های ۱۰ و ۳۴

حل: خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ با هم متوالی و خازن معادل آنها با خازن $C_۳$ موازی است.

$$C_{۱۲}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۱۰)(۵)}{۱۵}=۳/۳۳\ \mu\mathrm{F}$$
$$C_{eq}=C_{۱۲}+C_۳=۳/۳۳+۴=۷/۳۳\ \mu\mathrm{F}$$

●۱۱- ILW در شکل ۲۱-۲۹، ظرفیت معادل ترکیب را پیدا کنید. فرض کنید $C_۱$=۱۰/۰μF، $C_۲$=۵/۰۰μF، و $C_۳$=۴/۰۰μF.



شکل ۲۱-۲۹ مسئله‌های ۱۱، ۱۷، و ۳۸

حل: خازن‌های $C_۱$ و $C_۲$ با هم موازی و خازن معادل آنها با $C_۳$ متوالی است.

$$C_{۱۲}=C_۱+C_۲=۱۰+۵=۱۵\mu\mathrm{F}$$
$$C_{eg}=\frac{C_{۱۲}C_۳}{C_{۱۲}+C_۳}=\frac{(۱۵)(۴)}{۱۵+۴}=۳/۱۶\mu\mathrm{F}$$

●●۱۲- دو خازن تخت، هریک با ظرفیت ۶/۰μF، به طور موازی به یک باتری ۱۰ ولتی بسته شده‌اند. سپس فاصلهٔ صفحه‌های یکی از این دو خازن نصف می‌شود. بر اثر این کم شدن فاصله (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازن‌ها منتقل می‌شود؟ و (ب) افزایش بار خالص ذخیره شده در خازن‌ها چقدر است؟

حل: با توجه به اینکه باتری از مدار خارج نشده، همواره اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌های ثابت می‌ماند و چون ظرفیت‌ها نیز یکسان است، داریم:

$$q_۱=q_۲=C_۱V=(۶)(۱۰)=۶۰\mu\mathrm{F}$$

و بار کل برابر است با $q_{\text{کل}}=۱۲۰\mu\mathrm{C}$.

وقتی فاصلهٔ بین دو خازن نصف می‌شود، ظرفیت آن دو برابر می‌گردد، در نتیجه داریم:

$$q'_۱=C'_۱V=(۱۲)(۱۰)=۱۲۰\mu\mathrm{C}$$

و بار کل در این حالت برابر است با:

$$q'_{\text{کل}}=۶۰+۱۲۰=۱۸۰\mu\mathrm{F}$$
(الف) $\Delta q=۱۸۰-۱۲۰=۶۰\mu\mathrm{F}$

(ب) $\Delta q_۱=q'_۱-q_۱=۱۲۰+۶۰=۶۰\mu\mathrm{F}$

●●۱۳- SSM ILW خازنی با ظرفیت ۱۰۰pF تا اختلاف پتانسیل ۵۰V باردار و سپس باتری بادار کننده برداشته می‌شود. حال این خازن را به طور موازی به خازن دیگری (که در ابتدا بدون بار است) متصل می‌کنیم. اگر اختلاف پتانسیل دو سرخازن اول تا ۳۵V افت کند، ظرفیت خازن دوم چقدر است؟

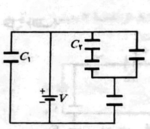
حل: بار اولیهٔ خازن اول برابر است با

$$q=C_۱V=(۱۰۰\times۱۰^{-۱۲})(۵۰)=۵\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{C}$$

وقتی این خازن به طور موازی به یک خازن بی‌بار بسته می‌شود، طبق پایستگی بار، بار اولیه بین دو خازن تقسیم می‌شود.

$$q=C_۱V+C_۲V=(C_۱+C_۲)V$$
$$۵\times۱۰^{-۹}=(۱۰۰+C_۲)(۳۵)\Rightarrow C_۲=۴۳\mathrm{pF}$$

●●۱۴- در شکل ۲۱-۳۰، اختلاف پتانسیل باتری ۱۰V و ظرفیت هر یک از پنج خازن برابر با ۱۰/۰μF است. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۰ مسئلهٔ ۱۴

حل: (الف) $q_۱=C_۱V_۱=(۱۰\times۱۰^{-۶})(۱۰)=۱\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{C}$

(ب) برای خازن‌های سمت راست داریم:

$$C_{eq}=\frac{CC'}{C+C'}$$

که در آن C' برابر است با:

$$C'=C+\frac{CC}{C+C}=\frac{۳}{۲}C$$

لذا خواهیم داشت:

$$C_{eq}=\frac{C\left(\frac{۳}{۲}C\right)}{C+\frac{۳}{۲}C}=\frac{۳}{۵}C=\left(\frac{۳}{۵}\right)(۱۰)=۶\mu\mathrm{F}$$

در نتیجه می‌توان بار کلی عبوری از خازن معادل را به دست آورد:

$$q_{eq}=C_{eq}V=(۶\times۱۰^{-۶})(۱۰)=۶\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{C}$$

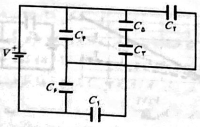
حال توجه خود را به مجموعهٔ خازن سه‌تایی بالا (سمت راست) با ظرفیت معادل C' متمرکز می‌کنیم.
اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با:

$$V'=\frac{q_{eq}}{C'}=\frac{۶\times۱۰^{-۵}}{\left(\frac{۳}{۲}\right)(۱۰\times۱۰^{-۶})}=۴\mathrm{V}$$

در نتیجه بار روی شاخه سمت چپ این مجموعه و از جمله $C_۲$ برابر است با:

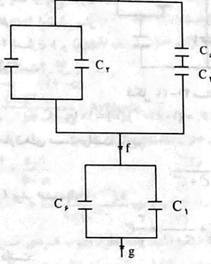
$$q_۲=\left(\frac{C}{۲}\right)V'=(۵)(۴)=۲۰\mu\mathrm{F}$$

●●۱۵- GO در شکل ۲۱-۳۱، یک باتری ۲۰ ولتی به دو سر خازن‌هایی به ظرفیت‌های $C_۱=C_۶=۳/۰۰\mu F$ و $C_۳=C_۵=۲/۰۰C_۴=۴/۰۰\mu F$، بسته شده است. (الف) ظرفیت معادل C_{eq} خازن‌ها و (ب) بار ذخیره شده توسط C_{eq} چقدر است؟ (پ) $V_۱$ و(ت) $q_۱$ خازن۱، (ث) $V_۲$ و (ج) $q_۲$ خازن ۲، (چ) $V_۳$ و (ح) $q_۳$ خازن ۳ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۱ مسئلهٔ ۱۵

حل: (الف)



(الف)

$$C_{۳۵}=\frac{C_۳C_۵}{C_۳+C_۵}=۲\mu F$$

$$C_{ef}=۲+۲+۲=۶\mu F$$

$$C_{fg}=C_{۱۶}=۳+۳=۶\mu F$$

$$C_{eq}=\frac{C_{ef}C_{fg}}{C_{eq}+C_{fg}}=۳\mu F$$

(ب) $q_{eq}=C_{eq}V=(۳)(۲۰)=۶۰\mu C$

(پ) $V_۱=V_{fg}=\frac{q_{eq}}{C_{۱۶}}=\frac{۶۰}{۶}=۱۰V$

(ت) $q_۱=C_۱V_۱=(۳)(۱۰)=۳۰\mu C$

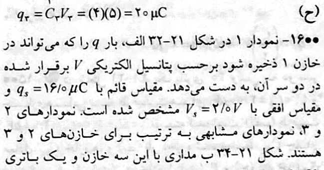
(ث) $V_۲=V_{ef}=\frac{q_{eq}}{C_{ef}}=\frac{۶۰}{۶}=۱۰V$

(ج) $q_۲=C_۲V_۲=(۲)(۱۰)=۲۰\mu C$

(چ) $V_۳=\frac{۱}{۲}V_{ef}=۵V$

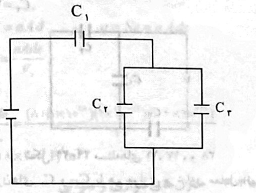
(ح) $q_۳=C_۳V_۳=(۴)(۵)=۲۰\mu C$

••۱۶- نمودار ۱ در شکل ۲۱-۳۲ الف، بار q را که می‌تواند در خازن ۱ ذخیره شود برحسب پتانسیل الکتریکی V برقرار شده در دو سر آن، به دست می‌دهد. مقیاس قائم با $q_s=۱۶/۰\mu C$ و مقیاس افقی با $V_s=۲/۰V$ مشخص شده است. نمودارهای ۲ و ۳، نمودارهای مشابهی به ترتیب برای خازن‌های ۲ و ۳ هستند. شکل ۲۱-۳۴ ب مداری با این سه خازن و یک باتری ۶/۰V را نشان می‌دهد. چه باری در خازن ۲ در این مدار ذخیره شده است؟



شکل ۲۱-۳۲ مسئلهٔ ۱۶

حل: ظرفیت هر خازن را می‌توان با استفاده از شیب منحنی‌های داده شده به دست آورید.



$$C_۱=\frac{\Delta q_۱}{\Delta V_۱}=\frac{۱۲}{۲}=۶\mu F$$

$$C_۲=\frac{\Delta q_۲}{\Delta V_۲}=\frac{۸}{۲}=۴\mu F$$

$$C_۳=\frac{\Delta q_۳}{\Delta V_۳}=\frac{۴}{۲}=۲\mu F$$

$$C_{۲۳}=C_۲+C_۳=۴+۲=۶\mu F$$

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_{۲۳}}{C_۱+C_{۲۳}}=۳\mu F$$

$$q_{eq}=q_۱=q_{۲۳}=C_{eq}V$$

$$q_{۲۳}=(۳)(۶)=۱۸\ \mu F$$

$$V_۲=V_{۲۳}=\frac{q_{۲۳}}{C_{۲۳}}=\frac{۱۸}{۶}=۳V$$

$$q_۲=C_۲V_۲=(۴)(۳)=۱۲\mu F$$

••۱۷- GO در شکل ۲۱-۲۹، اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰/۰V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیتهای $C_۱=۱۰/۰\mu F$، $C_۲=۵/۰۰\mu F$، و $C_۳=۴/۰۰\mu F$ اعمال شده است. اگر خازن ۳ فروشکست الکتریکی پیدا کند، به گونه‌ای که معادل یک سیم رسانا شود، (الف) بار روی خازن ۱ و (ب) اختلاف پتانسیل دو سرخازن ۱، چقدر افزایش می‌یابد؟

حل: پیش از فرو شکست الکتریکی خازن $C_۳$، در حل مسئله ۹ ظرفیت معادل مدار را برابر با $C_{eq}=۳/۱۶\mu F$ به دست آوردیم و در نتیجه بار کل در این حالت برابر است با:

$$q=C_{eq}V=(۳/۱۶)(۱۰۰)=۳۱۶\mu C$$

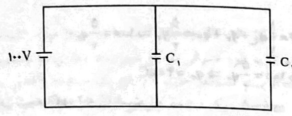
همچنین اختلاف پتانسیل دو سر $C_۱$ و $C_۲$ با هم برابرند و داریم:

$$V_۱=V_۲=\frac{q}{C_۱+C_۲}=\frac{۳۱۶}{۱۵}=۲۱/۱V$$

و

$$q_۱=C_۱V_۱=(۱۰)(۲۱/۱)=۲۱۱\mu C$$

حال پس از خرابی خازن $C_۳$ و اتصال کوتاه شدن آن مدار زیر حاصل می‌شود.



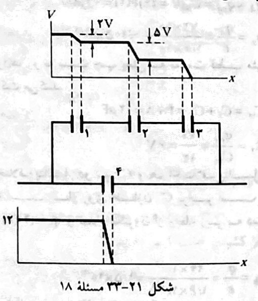
لذا داریم $V_۱'=V_۲'=۱۰۰$.

(الف) $q_۱'=C_۱V_۱'=(۱۰)(۱۰۰)=۱۰۰۰\mu C$

$$\Delta q_۱=q_۱'-q_۱=۱۰۰۰-۲۱۱=۷۸۹\mu C$$

(ب) $\Delta V_۱=V_۱'-V_۱=۱۰۰-۲۱/۱=۷۸/۹V$

••۱۸- شکل ۲۱-۳۳ بخشی از مدار مربوط به چهار خازن پر شده از هوا را که به مدار بزرگتری متصل شده است، نشان می‌دهد. نمودار زیر این بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت پایینتر این بخش، عبوری از خازن ۴، نشان می‌دهد. به همین ترتیب، نمودار بالای این بخش، پتانسیل الکتریکی $V(x)$ را برحسب تابعی از مکان x روی قسمت بالاتر این بخش، عبوری از خازن‌های ۱، ۲، ۳، نشان می‌دهد. ظرفیت خازن ۳ برابر با $۰/۸۰\mu F$ است. ظرفیت‌های (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۳ مسئلهٔ ۱۸

حل:

$$V_۴=V_۱+V_۲+V_۳$$

$$۱۲=۲+۵+V_۳\Rightarrow V_۳=۵V$$

لذا بار روی این خازن برابر است با

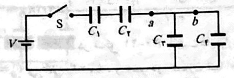
$$q_۳=C_۳V_۳=(۰/۸\mu F)(۵)=۴\mu C$$

(الف) چون خازن‌های $C_۱$، $C_۲$ و $C_۳$ متوالی‌اند بار روی آنها یکسان است، لذا $q_۱=q_۲=q_۳=۴\mu C$ و در نتیجه داریم:

$$C_۱=\frac{q_۱}{V_۱}=\frac{۴}{۲}=۲\mu C$$

(ب) $C_۲=\frac{q_۲}{V_۲}=\frac{۴}{۵}=۰/۸\ \mu C$

••۱۹- درشکل ۲۱-۳۴، باتری دارای اختلاف پتانسیل $V=۹/۰V$، $C_۲=۳/۰\mu F$، $C_۴=۴/۰\mu F$، و همهٔ خازن‌ها در ابتدا بدون بارند. وقتی کلید S بسته شود، بار کل $۱۲\mu C$ از نقطهٔ a و بارکل $۸/۰\mu C$ از نقطهٔ b عبور می‌کند. (الف) $C_۱$ و (ب) $C_۳$ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۴ مسئلهٔ ۱۹

حل: بار روی $C_۴$ برابر $q_۴=۸\mu C$ و در نتیجه اختلاف پتانسیل دو سر آن برابر است با

$$V_۴=\frac{q_۴}{C_۴}=\frac{۸}{۴}=۲V$$

بار روی خازن $C_۳$ نیز برابر است با $q_۳=۱۲-۸=۴\mu C$ و داریم $V_۳=V_۴=۲V$ در نتیجه $C_۳$ برابر است با

$$C_۳=\frac{q_۳}{V_۳}=\frac{۴}{۲}=۲\mu F$$

برای به دست آوردن $C_۱$، ابتدا ظرفیت معادل را با توجه به بار کل و اختلاف پتانسیل محاسبه می‌کنیم

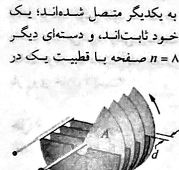
$$C_{eq}=\frac{q_{کل}}{V_{bat}}=\frac{۱۲}{۹}=\frac{۴}{۳}\mu F$$

از طرفی می‌توان ظرفیت معادل را از طریق مدار بازنویسی کرد. $C_۳$ و $C_۴$ موازی‌اند و خازن معادل آنها با $C_۱$ و $C_۲$ متوالی‌اند لذا می‌توان نوشت.

$$\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{C_۳+C_۴}+\frac{۱}{C_۲}+\frac{۱}{C_۱}$$

$$\frac{۱}{\frac{۴}{۳}}=\frac{۱}{۲+۴}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{C_۱}\Rightarrow C_۱=۴\mu F$$

••۲۰- شکل ۲۱-۳۵ خازن متغیری «با فاصلهٔ هوا» را نشان می‌دهد که برای میزان کردن دستی رادیوها به کار می‌رود. صفحه‌ها به طور یک درمیان به یکدیگر متصل شده‌اند؛ یک دسته از صفحه‌ها در مکان خود ثابت‌اند، و دسته‌ای دیگر می‌توانند بچرخند. خازنی با $n=۸$ صفحه با قطبیت یک در میان، هر یک به مساحت $A=۱/۲۵cm^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های مجاور برابر $d=۳/۴۰mm$ را در نظر بگیرید. ظرفیت بیشینهٔ این خازن چقدر است؟

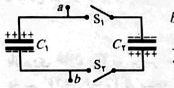


شکل ۲۱-۳۵ مسئلهٔ ۲۰

حل: وقتی که صفحات دقیقاً روبه‌روی هم قرار گیرند ظرفیت بیشینه حاصل می‌شود. در این حالت $(n-۱)$ تک خازن داریم که ظرفیت هر یک $C_۰=\varepsilon_۰A/d$ است لذا ظرفیت کل این آرایش خازنی برابر است با

$$C=(n-۱)C_\circ=\frac{(n-۱)\varepsilon_\circ A}{d}$$
$$=\frac{(۸-۱)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۱/۲۵\times ۱۰^{-۴})}{۳/۴\times ۱۰^{-۳}}=۲/۲۸\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

●●۲۱- SSM WWW در شکل ۲۱-۳۶، ظرفیت‌ها عبارت‌اند از $C_۱=۱/۰\mu F$ و $C_۲=۳/۰\mu F$، و هر دو خازن تا اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰\mathrm{V}$، ولی به ترتیبی که نشان داده شده است با قطبیدگی مخالف، باردار شده‌اند. کلیدهای $S_۱$ و $S_۲$ بسته می‌شوند. (الف) اکنون اختلاف پتانسیل میان نقطه‌های a و b چقدر است؟ در این موقع بار روی خازن (ب) ۱ و (پ) ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۳۶ مسئلهٔ ۲۱

حل: بار هر خازن پیش از اتصال کلیدها برابر است با

$$q_۱=C_۱V_۱=(۱)(۱۰۰)=۱۰۰\mu F$$
$$q_۲=C_۲V_۲=(۳)(۱۰۰)=۳۰۰\mu F$$

پس از اتصال کلیدها بار خنثی نشده برابر است با

$$q=q_۲-q_۱=۳۰۰-۱۰۰=۲۰۰\mu F$$

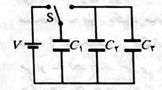
(الف) پس از اتصال کلیدها، دو خازن داریم که به صورت موازی بسته شده‌اند.

$$V_{ab}=\frac{q}{C_۱+C_۲}=\frac{۲۰۰}{۱+۳}=۵۰\ \mathrm{V}$$

(ب) $q'_۱=C_۱V_{ab}=(۱)(۵۰)=۵۰\mu C$

(پ) $q'_۲=C_۲V_{ab}=(۳)(۵۰)=۱۵۰\mu C$

●●۲۲- در شکل ۲۱-۳۷، $V=۱۰\mathrm{V}$ ، $C_۱=۱۰\mu F$ ، و $C_۲=C_۳=۲۰\mu F$ است. کلید S نخست به طرف چپ زده می‌شود تا خازن ۱ به وضعیت تعادل برسد. سپس کلید به طرف راست زده می‌شود. وقتی وضعیت تعادل دوباره به دست آید، چقدر بار روی خازن ۱ است؟



شکل ۲۱-۳۷ مسئلهٔ ۲۲

حل: در حالتی که کلید s به طرف چپ زده شده و خازن $C_۱$ به تعادل می‌رسد، داریم:

$$Q=C_۱V=(۱۰)(۱۰)=۱۰۰\mu C$$

پس از آنکه کلید به سمت راست زده می‌شود با Q بین خازن‌ها تقسیم می‌شود (پایستگی بار)

$$Q=q_۱+q_۲+q_۳$$

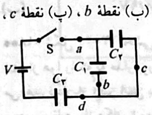
چون $C_۲=C_۳$ است لذا $q_۲=q_۳$ خواهد بود. خازن‌ها موازی‌اند در نتیجه می‌توان نوشت

$$\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{q_۳}{C_۳}\Rightarrow\frac{q_۱}{۱۰}=\frac{q_۳}{۲۰}\Rightarrow q_۱=\frac{۱}{۲}q_۳$$

$$Q=\frac{۱}{۲}q_۳+q_۳+q_۳=\frac{۵}{۲}q_۳\Rightarrow ۱۰۰=\frac{۵}{۲}q_۳$$
$$\Rightarrow ۱۰۰=\frac{۵}{۲}q_۳\Rightarrow q_۳=۴۰\mu C$$

و در نتیجه $C_۱=۲۰\mu C$ است.

●●۲۳- خازن‌ها در شکل ۲۱-۳۸ در ابتدا بدون بارند. ظرفیت‌ها عبارت‌اند از: $C_۱=۴/۰\mu F$ ، $C_۲=۸/۰\mu F$ ، و $C_۳=۱۲\mu F$ و اختلاف پتانسیل باتری $V=۱۲\mathrm{V}$ است. وقتی کلید S بسته شود، چه تعداد الکترون از (الف) نقطهٔ a ، (ب) نقطهٔ b ، (پ) نقطهٔ c ، و (ت) نقطهٔ d می‌گذرد؟ در شکل، آیا الکترون‌ها به طرف بالا یا به طرف پایین از (ث) نقطهٔ b و (ج) نقطهٔ c می‌گذرند؟



شکل ۲۱-۳۸ مسئلهٔ ۲۳

حل: ظرفیت معادل کل برابر است با

$$C_{eq}=\frac{C_۳(C_۱+C_۲)}{C_۳+(C_۱+C_۲)}=۶\mu F$$

(الف) باری که از نقطه a می‌گذرد برابر است با

$$q_a=q_{eq}=C_{eq}V=(۶)(۱۲)=۷۲\mu C$$

$$n_a=\frac{q_a}{e}=\frac{۷۲\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۴/۵\times ۱۰^{۱۴}$$ عدد

این الکترون‌ها رو به سمت چپ یعنی به سمت قطب مثبت باتری حرکت می‌کنند.

(ب) $C_{۱۲}=C_۱+C_۲=۴+۸=۱۲\mu F$

$$V_{۱۲}=\frac{q_{eq}}{C_{۱۲}}=\frac{۷۲}{۱۲}=۶\mathrm{V}$$

این هم اختلاف پتانسیل دو سر $C_۱$ و هم اختلاف پتانسیل دو سر $C_۲$ است. بار روی خازن $C_۱$ برابر است با $q_۱=(۴)(۶)=۲۴\mu C$ و تعداد الکترون از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$n_b=\frac{q_۱}{e}=\frac{۲۴\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۱/۵\times ۱۰^{۱۴}$$ عدد

این الکترون‌ها به سمت بالا حرکت می‌کنند

(پ) $q_e=C_۲V_{۱۲}=(۸)(۶)=۴۸\mu C$

$$n_C=\frac{q_۲}{e}=\frac{۴۸\times ۱۰^{-۶}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۳\times ۱۰^{۱۴}$$ تعداد

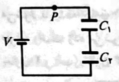
این الکترون‌ها نیز به سمت بالا حرکت می‌کنند.

(ت) چون $C_۳$ با باتری متوالی است، بار عبوری از آن همان بار عبوری از باتری است. در نتیجه تعداد $۴/۵\times ۱۰^{۱۴}$ الکترون رو به سمت راست از نقطه d می‌گذرند.

(ث) همانطور که در قسمت (ب) دیدیم الکترون‌ها رو به بالا حرکت می‌کنند.

(ج) با توجه به قسمت (پ) الکترون‌ها رو به بالا از نقطه C می‌گذرند.

●●۲۴- شکل ۲۱-۳۹ دو خازن استوانه‌ای پر از هوا را نشان می‌دهد که به طور متوالی به دو سر یک باتری با پتانسیل $V=۱۰\mathrm{V}$ بسته شده‌اند. خازن ۱ دارای یک صفحهٔ داخلی به شعاع $۵/۰\mathrm{mm}$ ، یک صفحهٔ خارجی به شعاع $۱/۵\mathrm{cm}$ ، و طول $۵/۰\mathrm{cm}$ است. خازن ۲ دارای یک صفحهٔ داخلی به شعاع $۲/۵\mathrm{mm}$ ، یک صفحهٔ خارجی به شعاع $۱/۰\mathrm{cm}$ ، و طول $۹/۰\mathrm{cm}$ است. صفحهٔ خارجی خازن ۲ از جنس یک غشاء آلی رساناست که می‌تواند کشیده شود، و بدین ترتیب با زیاد شدن فاصلهٔ صفحه‌ها، ظرفیت این خازن افزایش می‌یابد. اگر براثر کش آمدن، شعاع صفحهٔ خارجی تا $۲/۵\mathrm{cm}$ افزایش یابد (الف) چه تعداد الکترون از نقطهٔ P می‌گذرند و (ب) آیا آنها به سوی باتری حرکت می‌کنند یا در جهت دورشدن از آن؟



شکل ۲۱-۳۹ مسئلهٔ ۲۴

حل: ابتدا ظرفیت هر خازن را با استفاده از رابطه ظرفیت خازن استوانه‌ای به دست آورده، سپس ظرفیت معادل آنها و بار کل را پیش و پس از کشیده شدن خازن ۲ را محاسبه می‌کنیم.

$$C_۱=\frac{۲\pi\varepsilon_\circ L_۱}{Ln\frac{b_۱}{a_۱}}=\frac{۲(۳/۱۴)(۸/۸۵\times ۱۰^{-۱۲})(۵\times ۱۰^{-۲})}{Ln\left(\frac{۱۵}{۵}\right)}$$
$$=۲/۵۳\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

$$C_۲=\frac{۲\pi\varepsilon_\circ L_۲}{Ln\frac{b_۲}{a_۲}}=۳/۶۱\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۲/۵۳\times ۱۰^{-۱۲})(۳/۶۱\times ۱۰^{-۱۲})}{(۲/۵۳+۳/۶۱)\times ۱۰^{-۱۲}}=۱/۴۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

$$q=C_{eq}V=(۱/۴۹\times ۱۰^{-۱۲})(۱۰)=۱۴/۹\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C}$$

پس از کشیدن خازن ۲ نیز داریم:

$$C'_۲=\frac{۲\pi\varepsilon_\circ L_۲}{Ln\left(\frac{b'_۲}{a_۲}\right)}=۲/۱۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

$$C'_{eq}=\frac{C_۱C'_۲}{C_۱+C'_۲}=۱/۱۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

$$q'=C'_{eq}V=(۱/۱۷\times ۱۰^{-۱۲})(۱۰)=۱۱/۷\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C}$$

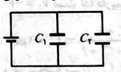
(الف)

$$\Delta q=q'-q=۱۱/۷\times ۱۰^{-۱۲}-۱۴/۹\times ۱۰^{-۱۲}=-۳/۲\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C}$$

$$n=\frac{\Delta q}{e}=\frac{۳/۲\times ۱۰^{-۱۲}}{۱/۶\times ۱۰^{-۱۹}}=۲\times ۱۰^{۷}$$ عدد

(ب) با توجه به اینکه Δq منفی است لذا همین مقدار بار مثبت از نقطه p به سمت باتری می‌روند. یعنی تعداد n الکترون از باتری حرکت کرده و به طرف سمت راست نقطه P می‌روند.

●●۲۵- در شکل ۲۱-۴۰، دو خازن تخت (با هوا در میان صفحه‌های آن) به یک باتری وصل شده است. خازن ۱ دارای مساحت صفحهٔ $۱/۵\mathrm{cm}^۲$ و یک میدان الکتریکی (میان صفحه‌های آن) به بزرگی $۲۰۰۰\ \mathrm{V/m}$ است. خازن ۲ دارای مساحت صفحهٔ $۰/۷۰\mathrm{cm}^۲$ و یک میدان الکتریکی به بزرگی $۱۵۰۰\mathrm{V/m}$ است. بار کل روی دو خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۰ مسئلهٔ ۲۵

حل:

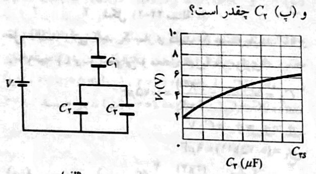
$$E_۱=\frac{V}{d_۱}\Rightarrow d_۱=VE_۱\quad,\quad d_۲=VE_۲$$

$$C_۱=\varepsilon_\circ\frac{A_۱}{d_۱}=\varepsilon_\circ\frac{A_۱}{VE_۱}\quad,\quad C_۲=\varepsilon_\circ\frac{A_۲}{d_۲}=\varepsilon_\circ\frac{A_۲}{VE_۲}$$

$$C_{eq}=C_۱+C_۲=\frac{\varepsilon_\circ}{V}\left(\frac{A_۱}{E_۱}+\frac{A_۲}{E_۲}\right)$$

$$q=C_{eq}V=\varepsilon_\circ\left(\frac{A_۱}{E_۱}+\frac{A_۲}{E_۲}\right)\Rightarrow q=۳/۵۸\times ۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{C}$$

●●●۲۶- خازن ۳ در شکل ۲۱-۴۱ الف یک *خازن متغیر* است (ظرفیت $C_۳$ آن می‌تواند تغییر کند). شکل ۲۱-۴۴ ب، پتانسیل الکتریکی $V_۱$ در دو سر خازن ۱ را برحسب $C_۳$ به دست می‌دهد. مقیاس محور افقی با $C_{۳s}=۱۲/۰\mu F$ مشخص شده است. پتانسیل الکتریکی $V_۱$ وقتی $C_۳\to\infty$ میل کند به مجانب $۱۰\mathrm{V}$ می‌رسد. (الف) پتانسیل الکتریکی V در دو سر باتری، (ب) $C_۱$ ، و (پ) $C_۲$ چقدر است؟



(الف) (ب)

شکل ۲۱-۴۱ مسئلهٔ ۲۶

حل: خازن معادل مدار را به دست می‌آوریم.

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_{۲۳}}{C_۱+C_{۲۳}}=\frac{C_۱(C_۲+C_۳)}{C_۱+(C_۲+C_۳)}$$

حال می‌توان نوشت $q=C_{eq}V$ و از طرفی $q=q_۱=C_۱V_۱$ است که از اینجا می‌توان $V_۱$ اختلاف پتانسیل دو سر خازن $C_۱$ را به دست آورد.

$$V_۱=\frac{C_۲+C_۳}{C_۱+C_۲+C_۳}V$$

(الف) وقتی $C_۳\to\infty$ میل کند داریم $V_۱=V$ و چون در این حالت پتانسیل الکتریکی $V_۱$ به تعداد مجانبی $۱۰\mathrm{V}$ میل می‌کند لذا پتانسیل دو سر باتری $V=۱۰\mathrm{V}$ است.

(ب) و (پ) از منحنی می‌بینیم که در $C_۳=۰$ داریم $V_۱=۲V$، لذا با توجه به رابطه فوق داریم:

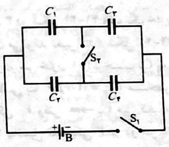
$$۲=\frac{C_۲}{C_۱+C_۲}(۱۰)\Rightarrow C_۱=۴C_۲$$

همچنین از نمودار مشاهده می‌شود که در $C_3 = 6\mu F$ و $V_1 = \frac{1}{2}V$ است لذا داریم

$$\frac{1}{2}V = \frac{C_2+6}{C_1+C_2+6}V \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{C_2+6}{4C_2+C_2+6} \Rightarrow C_2 = 2\mu F$$

و در نتیجه برای C_1 از رابطه $C_1 = 4C_2$ خواهیم داشت $C_1 = 8\mu F$.

●●●۲۷- شکل ۲۱-۴۲ یک باتری ۱۲/۰ ولتی و چهار خازن بدون بار با ظرفیت‌های $C_1 = 1.00\mu F$ ، $C_2 = 2.00\mu F$ ، $C_3 = 3.00\mu F$ ، و $C_4 = 4.00\mu F$ را نشان می‌دهد. اگر فقط کلید S_1 بسته شود، بار روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲ ، (پ) خازن ۳ ، و (ت) خازن ۴ چقدر می‌شود؟ اگر هر دو کلید بسته شوند، بار روی (ث) خازن ۱ ، (ج) خازن ۲ ، (چ) خازن ۳، و (ح) خازن ۴ چقدر می‌شود؟



شکل ۲۱-۴۲ مسئلهٔ ۲۷

حل: (الف) وقتی کلید S_2 باز و کلید S_1 بسته باشد، C_1 و C_3 و نیز C_2 و C_4 متوالی و معادل آنها با هم موازی‌اند.

$$C_{13} = \frac{C_1C_3}{C_1+C_3} = \frac{(1)(3)}{1+3} = 0.75\mu F$$

$$q_1 = q_3 = q_{13} = C_{13}V$$

$$q_1 = (0.75)(12) = 9\mu F$$

(ب)
$$C_{24} = \frac{C_2C_4}{C_2+C_4} = \frac{(2)(4)}{2+4} = \frac{4}{3}\mu F$$

$$q_2 = q_4 = q_{24} = C_{24}V$$

$$q_2 = \left(\frac{4}{3}\right)(12) = 16\mu C$$

(پ) $q_3 = q_1 = 9\mu F$

(ت) $q_4 = q_2 = 16\mu F$

(ث) و (ج) حال اگر کلید S_2 را ببندیم، خازن‌های C_1 و C_2 موازی وهمچنین خازن‌های C_3 و C_4 موازی و نتیجه آنها با هم متوالی می‌گردند. در این صورت داریم:

$$C_{12} = C_1 + C_2 = 3\mu F$$

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 7\mu F$$

$$C_{eq} = \frac{C_{12}C_{34}}{C_{12}+C_{34}} = \frac{(3)(7)}{3+7} = 2.1\mu F$$

$$q_{eq} = q_{12} = q_{34} = C_{eq}V = (2.1)(12) = 25.2\mu C$$

$$V_1 = V_2 = \frac{q_{12}}{C_{12}} = \frac{25.2}{3} = 8.4V$$

$$q_1 = C_1V_1 = (1)(8.4) = 8.4\mu C$$

$$q_2 = C_2V_2 = (1)(8.4) = 16.8\mu C$$

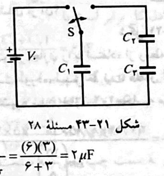
(چ) و (ح)
$$V_{34} = V - V_{12} = 12 - 8.4 = 3.6V$$

چون خازن‌های C_3 و C_4 موازی‌اند $V_3 = V_4 = V_{34} = 3.6V$ بوده و بار روی خازن‌ها C_3 و C_4 عبارتند از

$$q_3 = C_3V_3 = (3)(3.6) = 10.8\mu C$$

$$q_4 = C_4V_4 = (4)(3.6) = 14.4\mu C$$

●●●۲۸- GO شکل ۲۱-۴۳، یک باتری ۱۲ ولتی و سه خازن بدون بار به ظرفیت‌های $C_1 = 4.00\mu F$ ، $C_2 = 6.00\mu F$ ، و $C_3 = 3.00\mu F$ را نشان می‌دهد. کلید به طرف چپ زده می‌شود تا اینکه خازن ۱ به طور کامل باردار شود. سپس کلید به طرف راست زده می‌شود. بار نهایی روی (الف) خازن ۱، (ب) خازن ۲ و (پ) خازن ۳ چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۳ مسئلهٔ ۲۸

حل:
$$C_{23} = \frac{C_2C_3}{C_2+C_3} = \frac{(6)(3)}{6+3} = 2\mu F$$

هنگامی که کلید به سمت چپ زده می‌شود خازن C_1 شارژ می‌شود.

$$q_1 = C_1V = (4)(12) = 48\mu F \quad , \quad q_{23} = 0$$

$$q_{\text{کل}} = 48\mu F$$

وقتی که کلید به سمت راست زده می‌شود باتری از مدار خارج شده و بار q_1 از روی خازن C_1 به خازن C_{23} منتقل شده و هم پتانسیل می‌شوند.

(الف)
$$V' = \frac{q'_1}{C_1} = \frac{q'_{23}}{C_{23}} = \frac{q_1}{C_1+C_2}$$

$$\Rightarrow \frac{q'_1}{4} = \frac{48}{4+2} \Rightarrow q'_1 = 32\mu C$$

(ب) و (پ)
$$\frac{q'_{23}}{2} = \frac{48}{6} \Rightarrow q'_{23} = 16\mu C$$

$$q'_2 = q'_3 = q'_{23} = 16\mu C$$

بخش ۲۱-۵ انرژی ذخیره شده در میدان الکتریکی

●۲۹- برای آنکه $10kW.h$ انرژی با اختلاف پتانسیل $1000V$ ذخیره شود، به چه ظرفیتی نیاز است؟

حل:
$$10\,kW\cdot h = (10)(10^3)(3600) = 3.6\times10^7\ J$$

$$U = \frac{1}{2}CV^2 \Rightarrow 3.6\times10^7 = \frac{1}{2}C(1000)^2 \Rightarrow C = 72F$$

●۳۰- چقدر انرژی در $1.00m^3$ هوا، بر اثر میدان الکتریکی در «هوای صاف» به بزرگی $150V/m$ ذخیره می‌شود؟

حل:
$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{1}{2}(8.85\times10^{-12})(150)^2$$
$$= 9.96\times10^{-8}\ J/m^3$$

$$U = uV = (9.96\times10^{-8})(1) = 9.96\times10^{-8}\ J$$

●۳۱- SSM خازنی به ظرفیت $2.0\mu F$ با خازن دیگری به ظرفیت $4.0\mu F$ به طور موازی به اختلاف پتانسیل $300V$ بسته شده‌اند. انرژی کل ذخیره شده در خازن‌ها را محاسبه کنید.

حل:
$$C_{eq} = C_1 + C_2 = 6\mu F$$

$$U = \frac{1}{2}C_{eq}V^2 = \frac{1}{2}(6\times10^{-6})(300)^2 = 0.27J$$

●۳۲- یک خازن تخت پر از هوا به مساحت $40cm^2$ و فاصلهٔ صفحه‌های $1.0mm$ تا اختلاف پتانسیل $600V$ باردار شده است. مطلوب است (الف) ظرفیت، (ب) بزرگی بار روی هر صفحه، (پ) انرژی ذخیره شده، (ت) میدان الکتریکی میان صفحه‌ها و (ث) چگالی انرژی میان صفحه‌ها.

حل: (الف)
$$C = \frac{\varepsilon_0A}{d} = \frac{(8.85\times10^{-12})(40\times10^{-4})}{1\times10^{-3}}$$
$$= 3.54\times10^{-11}\ F = 35.4\mu F$$

(ب)
$$q = CV = (3.54\times10^{-11})(600)$$
$$= 2.12\times10^{-8}\ C = 21.2nC$$

(پ)
$$U = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}(3.54\times10^{-11})(600)^2$$
$$= 6.37\times10^{-6}\ J$$

(ت)
$$E = \frac{V}{d} = \frac{600}{1\times10^{-3}} = 6\times10^5\ V/m$$

(ث)
$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{1}{2}(8.85\times10^{-12})(6\times10^5)^2$$
$$= 1.6\ J/m^3$$

●●۳۳- یک کرهٔ فلزی منزوی باردار به قطر $10cm$ دارای پتانسیل $8000V$ نسبت به $V=0$ در بینهایت است. چگالی انرژی را در میدان الکتریکی نزدیک به سطح کره محاسبه کنید.

حل: پتانسیل و میدان الکتریکی روی سطح کره عبارتند از

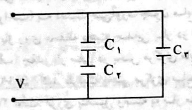
$$V = k\frac{q}{R} \quad , \quad E = k\frac{q}{R^2}$$

لذا داریم $E = \frac{V}{R}$ ، در نتیجه می‌توان نوشت:

$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{V}{R}\right) = \frac{1}{2}(8.85\times10^{-12})\left(\frac{8000}{0.05}\right)^2$$
$$= 0.113\ J/m^3$$

●●۳۴- در شکل ۲۱-۲۸، اختلاف پتانسیل $V = 100V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیت‌های $C_1 = 10.0\mu F$ ، $C_2 = 5.00\mu F$ ، و $C_3 = 4.0\mu F$ اعمال شده است. مطلوب است (الف) بار q_3 ، (ب) اختلاف پتانسیل V_3 ، و (پ) انرژی ذخیرهٔ شدهٔ U_3 در خازن ۳، (ت) q_1 ، (ث) V_1 ، و (ج) U_1 برای خازن ۱، و (چ) q_2 ، (ح) V_2 ، و (خ) U_2 برای خازن ۲.

حل:



(الف) $q_3 = C_3V = (4)(100) = 400\mu C$

(ب) $V_3 = V = 100V$

(پ)
$$U_3 = \frac{1}{2}C_3V_3^2 = \frac{1}{2}(4\times10^{-6})(100)^2 = 0.02J$$

(ت)
$$C_{12} = \frac{C_1C_2}{C_1+C_2} = \frac{(10)(5)}{10+5} = 3.33\mu F$$

$$q_1 = q_2 = q_{12} = C_{12}V = (3.33)(100) = 333\mu C$$

(ث)
$$V_1 = \frac{q_1}{C_1} = \frac{333}{10} = 33.3V$$

(ج)
$$U_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2 = \frac{1}{2}(10)(33.3)^2 = 5.55\times10^{-3}\ J$$

(چ) قبلاً به دست آمده است.

$$q_2 = q_1 = 333\mu C$$

(ح)
$$V_2 = \frac{q_2}{C_2} = \frac{333}{5} = 66.6V$$

(خ)
$$U_2 = \frac{1}{2}C_2V_2^2 = \frac{1}{2}(5\times10^{-6})(66.6)^2 = 1.11\times10^{-2}\ J$$

●●۳۵- فرض کنید یک الکترون ساکن، باری نقطه‌ای است. مطلوب است چگالی u میدان الکتریکی آن در فاصله‌های شعاعی (الف) $r = 1.00mm$ ، (ب) $r = 1.00\mu m$ ، (پ) $r = 1.00nm$ ، و (ت) $r = 1.00pm$. (ث) u در حد $r \to 0$ چقدر است؟

حل:
$$u = \frac{1}{2}\varepsilon_0E^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0r^2}\right) = \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0r^4} = \frac{9.17\times10^{-30}}{r^4}$$

(الف) به ازای $r = 1\times10^{-3}\ m$ داریم $u = 9.16\times10^{-18}\ J/m^3$.

(ب) به ازای $r = 1\times10^{-6}\ m$ داریم $u = 9.16\times10^{-6}\ J/m^3$.

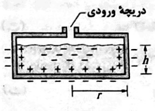
(پ) به ازای $r = 1\times10^{-9}\ m$ داریم $u = 9.16\times10^{6}\ J/m^3$.

(ت) به ازای $r = 1\times10^{-12}\ m$ داریم $u = 9.16\times10^{18}\ J/m^3$.

(ث) به ازای $r \to 0$ داریم $u \to \infty$.

●●۳۶- [redacted] به عنوان یک مهندس ایمنی، شما باید عمل ذخیره‌سازی مایعات رسانای قابل اشتعال را در یک محفظهٔ نارسانا ارزیابی کنید. شرکت تولید کنندهٔ یک مایع معین، از یک محفظهٔ کوتاه و ضخیم پلاستیکی به شعاع $r = 0.20m$ استفاده کرده است و آن را تا بلندی $h = 10cm$ ، که ارتفاع کامل سطح داخلی محفظه نیست، پر می‌کند (شکل ۲۱-۴۴). بررسی‌های شما نشان می‌دهد که در حین جابه‌جایی محفظه در شرکت،

سطح خارجی آن، یک چگالی بار منفی به بزرگی ۲/۰$\mu C/m^{۲}$ (تقریباً یکنواخت) به دست می‌آورد. چون مایع یک مادهٔ رساناست، بار روی محفظه باعث جدایی بار در داخل مایع می‌شود. (الف) چقدر بار منفی در بخش مرکزی مایع القا شده است؟ (ب) فرض کنید ظرفیت بخش مرکزی مایع نسبت به زمین ۳۵ pF است. انرژی پتانسیل وابسته به بار منفی در این خازن مؤثر چقدر است؟ (پ) اگر جرقه‌ای میان زمین و بخش مرکزی مایع (از طریق دریچهٔ ورودی) رخ دهد، این انرژی پتانسیل می‌تواند جرقه را تقویت کند. کمینهٔ انرژی جرقه که برای مشتعل ساختن مایع لازم است برابر با ۱۰mJ است. در این وضعیت، آیا جرقه می‌تواند مایع را مشتعل کند؟



شکل ۲۱-۴۴ مسئلهٔ ۳۶

حل: (الف) مساحت سطح باردار شده برابر است با

$$A=\pi r^{۲}+۲\pi rh=\pi(۰/۲)^{۲}+۲\pi(۰/۲)(۰/۱)$$
$$=۰/۲۵\,m^{۲}$$

از روی شکل مشاهده می‌شود که گرچه پایین این حجم استوانه‌ای باردار شده است ولی بالای آن بدون بار است. بنابراین بار منفی $q=\sigma A=(۲\times۱۰^{-۶})(۰/۲۵)=۰/۵\mu C$ روی سطح خارجی قرار می‌گیرد و در نتیجه و با توجه به فرضی مسئله همان بار q در سطح داخلی مایع القاء می‌شود.

(ب) $$U=\frac{q^{۲}}{۲C}=\frac{(۰/۵)^{۲}}{(۲)(۳۵\times۱۰^{-۱۲})}=۳/۶\times۱۰^{-۳}\,J=۳/۶\,mJ$$

(پ) چون انرژی ذخیره شده کمتر از انرژی لازم برای اشتعال است، جرقه باعث اشتعال نمی‌شود.

۳۷●●- WWW ILW SSM صفحه‌های موازی یک خازن، با مساحت ۸/۵۰$cm^{۲}$ و فاصلهٔ پر از هوا برابر ۳/۰۰mm ، توسط یک باتری ۶/۰۰V باردار شده است. سپس باتری برداشته شده و صفحه‌ها (بدون تخلیه) در فاصلهٔ ۸/۰۰mm از یکدیگر قرار داده می‌شوند. با چشم‌پوشی از اثر لبه‌ها (الف) اختلاف پتانسیل میان صفحه‌ها، (ب) انرژی ذخیره شدهٔ اولیه و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ نهایی، و (ت) کار لازم برای جداکردن صفحه‌ها را به دست آورید؟

حل: بار روی صفحه‌ها ثابت می‌ماند، لذا داریم:

$$q=CV=C'V'\Rightarrow\frac{\varepsilon_{۰}A}{d}V=\frac{\varepsilon_{۰}A}{d'}V'\Rightarrow\frac{V}{d}=\frac{V'}{d'}$$

(الف) $$\frac{۶}{۳\times۱۰^{-۳}}=\frac{V'}{۸\times۱۰^{-۳}}\Rightarrow V'=۱۶V$$

(ب)

$$C=\frac{\varepsilon_{۰}A}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۵\times۱۰^{-۴})}{۳\times۱۰^{-۳}}=۲/۵۱\times۱۰^{-۱۲}\,F$$

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}=\frac{۱}{۲}(۲/۵۱\times۱۰^{-۱۲})(۶)^{۲}=۴/۵۲\times۱۰^{-۱۱}\,J$$

(پ)

$$C'=\frac{\varepsilon_{۰}A}{d'}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۸/۵\times۱۰^{-۴})}{۸\times۱۰^{-۳}}=۹/۴\times۱۰^{-۱۳}\,F$$

$$U'=\frac{۱}{۲}C'V'^{۲}=\frac{۱}{۲}(۹/۴\times۱۰^{-۱۳})(۱۶)^{۲}=۱۲\times۱۰^{-۱۱}\,J$$

(ت)

$$W=U'-U=۱۲\times۱۰^{-۱۱}-۴/۵۲\times۱۰^{-۱۱}=۷/۴۸\times۱۰^{-۱۱}\,J$$

۳۸●●- در شکل ۲۱-۲۹، اختلاف پتانسیل $V=۱۰۰V$ به دو سر یک آرایش خازنی با ظرفیت‌های $C_{۱}=۱۰/۰\mu F$ ، $C_{۲}=۵/۰۰\mu F$ ، و $C_{۳}=۱۵/۰۰\mu F$ اعمال شده است. مطلوب است (الف) بار $q_{۳}$ ، (ب) اختلاف پتانسیل $V_{۳}$ ، و (پ) انرژی ذخیره شدهٔ $U_{۳}$ در خازن ۳، (ت) $q_{۱}$ ، (ث) $V_{۱}$ و (ج) $U_{۱}$ برای خازن ۱، و (چ) $q_{۲}$ ، (ح) $V_{۲}$ ، و (خ) $U_{۲}$ برای خازن ۲.

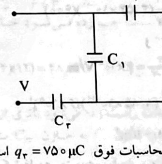
حل:

$$C_{۱۲}=C_{۱}+C_{۲}=۱۰+۵=۱۵\mu F$$

$$C_{eq}=\frac{C_{۳}C_{۱۲}}{C_{۳}+C_{۱۲}}=\frac{(۱۵)(۱۵)}{۱۵+۱۵}=۷/۵\mu F$$

$$q_{eq}=q_{۱۲}=q_{۳}=C_{eq}V=(۷/۵)(۱۰۰)=۷۵۰\mu C$$

$$V_{۱}=V_{۲}=V_{۱۲}=\frac{q_{۱۲}}{C_{۱۲}}=\frac{۷۵۰}{۱۵}=۵۰\,V$$



(الف) با توجه به محاسبات فوق $q_{۳}=۷۵۰\mu C$ است.

(ب) $$V_{۳}=\frac{q_{۳}}{C_{۳}}=\frac{۷۵۰}{۱۵}=۵۰\,V$$

(پ) $$U_{۳}=\frac{۱}{۲}C_{۳}V_{۳}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۱۵)(۵۰)^{۲}=۱/۸۸\times۱۰^{-۲}\,J$$

(ت) $$q_{۱}=C_{۱}V_{۱}=(۱۰)(۵۰)=۵۰۰\mu C$$

(ث) قبلاً محاسبه شده است $V_{۱}=۵۰\,V$.

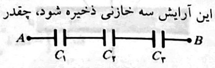
(ج) $$U_{۱}=\frac{۱}{۲}C_{۱}V_{۱}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۱۰\times۱۰^{-۶})(۵۰)^{۲}=۱/۲۵\times۱۰^{-۲}\,J$$

(چ) $$q_{۲}=C_{۲}V_{۲}=(۵)(۵۰)=۲۵۰\mu C$$

(ح) قبلاً محاسبه شده است $V_{۲}=۵۰\,V$.

(خ) $$U_{۲}=\frac{۱}{۲}C_{۲}V_{۲}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۵\times۱۰^{-۶})(۵۰)^{۲}=۶/۲۵\times۱۰^{-۳}\,J$$

۳۹●●- GO در شکل ۲۱-۴۵، $C_{۱}=۱۰/۰\mu F$ ، $C_{۲}=۲۰/۰\mu F$ ، و $C_{۳}=۲۵/۰\mu F$ است. اگر هیچ خازنی نتواند اختلاف پتانسیلی بیش از ۱۰۰V را بدون فروشکست الکتریکی تاب بیاورد، (الف) بزرگی اختلاف پتانسیل بیشینه‌ای که می‌تواند میان نقطه‌های A و B به‌وجود آید و (ب) انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند در این آرایش سه خازنی ذخیره شود، چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۵ مسئلهٔ ۳۹

حل: چون خازن‌ها به طور متوالی بسته شده‌اند بار روی آنها یکسان است. خازنی که ظرفیت کمتری دارد اختلاف پتانسیل بیشتری دارد. پس بیشترین اختلاف پتانسیل یعنی ۱۰۰ ولت روی دو سر خازن $C_{۱}$ قرار می‌گیرد.

$$q_{eq}=q_{۱}=q_{۲}=q_{۳}=C_{۱}V_{۱}=(۱۰)(۱۰۰)=۱۰۰۰\mu C$$

$$\frac{۱}{C_{eq}}=\frac{۱}{C_{۱}}+\frac{۱}{C_{۲}}+\frac{۱}{C_{۳}}=\frac{۱}{۱۰}+\frac{۱}{۲۰}+\frac{۱}{۲۵}\Rightarrow C_{eq}=۵/۲۶\mu F$$

(الف) $$V_{eq}=\frac{q_{eq}}{C_{eq}}=\frac{۱۰۰۰}{۵/۲۶}=۱۹۰\,V$$

(ب) $$U_{max}=\frac{۱}{۲}C_{eq}V_{eq}^{۲}=\frac{۱}{۲}(۵/۲۶)(۱۹۰)^{۲}=۰/۰۹۵J$$

بخش ۲۱-۶ خازن با دی‌الکتریک

۴۰●- یک خازن تخت پر از هوا دارای ظرفیت ۱/۳ pF است. فاصلهٔ صفحه‌ها را دو برابر می‌کنیم و میان آنها موم قرار می‌دهیم. ظرفیت جدید ۲/۶ pF است. ثابت دی‌الکتریک موم را به دست آورید.

حل

$$C_{۱}=\frac{\kappa\varepsilon_{۰}A}{d_{۱}}\qquad C_{۲}=\frac{\kappa_{۲}\varepsilon_{۰}A}{d_{۲}}=\frac{\kappa_{۲}\varepsilon_{۰}A}{۲d_{۱}}$$

$$\frac{C_{۲}}{C_{۱}}=\frac{\kappa_{۲}}{۲\kappa_{۱}}\Rightarrow\frac{۲/۶}{۱/۳}=\frac{\kappa_{۲}}{۲(۱)}\Rightarrow\kappa_{۲}=۴$$

۴۱●- SSM کابل هم‌محوری که در یک خط انتقال به کار گرفته می‌شود دارای شعاع داخلی ۰/۱۰mm و شعاع خارجی ۰/۶۰mm است. ظرفیت به ازای متر را برای این کابل محاسبه کنید. فرض کنید فضای میان رساناها با پلی استیرن پر شده است؟

حل: ظرفیت خازن استوانه‌ای از رابطهٔ زیر به دست می‌آید.

$$C=\frac{۲\pi k\varepsilon_{۰}L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}$$

ظرفیت بر متر کابل برابر است با

$$\frac{C}{L}=\frac{۲(۳/۱۴)(۲/۶)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}{Ln\left(\frac{۰/۶}{۰/۱}\right)}$$
$$=۸/۱\times۱۰^{-۱۱}\,F/m=۸۱\,pF/m$$

۴۲●- یک خازن تخت پر از هوا دارای ظرفیت ۵۰pF است. (الف) اگر مساحت هر یک از صفحه‌ها ۰/۳۵$m^{۲}$ باشد، فاصلهٔ آنها چقدر است؟ (ب) اگر اکنون ناحیهٔ میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=۵/۶$ پرشود، ظرفیت خازن چقدر می‌شود؟

حل: (الف)

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_{۰}A}{d}\Rightarrow\qquad d=\frac{\kappa\varepsilon_{۰}A}{C}$$

$$d=\frac{(۱)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۳۵)}{۵۰\times۱۰^{-۱۲}}=۶/۲\times۱۰^{-۲}\,m$$

(ب) $$C'=\kappa C=(۵/۶)(۵۰)=۲۸۰\,pF$$

۴۳●- SSM از شما خواسته شده است که یک خازن پر از هوا به ظرفیت ۷/۴ pF را به خازنی تبدیل کنید که با اختلاف پتانسیل بیشینهٔ ۶۵۲V تا انرژی ۷/۴μJ را ذخیره کند. اگر هیچ‌گونه شبههٔ کناره‌ای وجود نداشته باشد از کدام دی‌الکتریک در جدول ۲۱-۱ باید برای پرکردن فضای بین صفحه‌های خازن استفاده کنید؟

حل:

$$U=\frac{۱}{۲}CV^{۲}=\frac{۱}{۲}\kappa C_{۰}V^{۲}\Rightarrow\kappa=\frac{۲U}{C_{۰}V^{۲}}$$

$$\kappa=\frac{۲(۷/۴\times۱۰^{-۶})}{(۷/۴\times۱۰^{-۱۲})(۶۵۲)^{۲}}=۴/۷$$

۴۴●●- از شما خواسته شده است که خازنی با ظرفیت نزدیک به ۱nF و پتانسیل فروشکست بیش از ۱۰۰۰۰V را بسازید. به نظرتان می‌رسد که از یک لیوان پیرکس بلند به عنوان دی‌الکتریک استفاده کنید و سطح‌های خمیدهٔ داخلی و خارجی آن را با ورقه‌های آلومینیومی به عنوان صفحه‌های خازن بپوشانید. بلندی لیوان ۱۵cm، شعاع داخلی آن ۳/۶cm و شعاع خارجی آن ۳/۸ cm است. (الف) ظرفیت و (ب) پتانسیل فروشکست این خازن چقدر است؟

حل: (الف) این مجموعه یک خازن استوانه‌ای با دی‌الکتریک را تشکیل می‌دهد. ظرفیت چنین خازنی برابر است با:

$$C=\frac{۲\pi\kappa\varepsilon_{۰}L}{Ln\left(\frac{b}{a}\right)}=\frac{۲\pi(۴/۷)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۱۵m)}{Ln\left(\frac{۳/۸}{۳/۶}\right)}$$
$$=۰/۷۳\times۱۰^{-۹}\,F=۰/۷۳nF$$

(ب) قدرت دی‌الکتریک پیرکس، یعنی بیشینه مقدار میدان الکتریکی‌ای که پیرکس می‌تواند بدون سوختن عمل کند برابر ۱۴kV/mm است، بنابراین پتانسیل شکست برابر خواهد بود با:

$$V_{m}=\int_{a}^{b}E_{m}dr=E_{m}(b-a)=(۱۴)(۳۸-۳۶)$$
$$=۲۸kV$$

۴۵●●- خازن تخت معینی با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa=۵/۵$ پر شده است. مساحت هر صفحهٔ آن ۰/۰۳۴$m^{۲}$ است و صفحه‌ها ۲/۰mm از یکدیگر فاصله دارند. اگر میدان الکتریکی میان صفحه‌ها از ۲۰۰kN/C تجاوز کند، خازن فرو می‌ریزد (اتصال کوتاه شده و می‌سوزد). انرژی بیشینه‌ای که می‌تواند در خازن ذخیره شود چقدر است؟

حل:

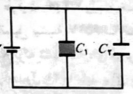
$$C=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{(۵/۵)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۰/۰۳۴)}{۲\times۱۰^{-۳}}$$

$$=۸/۲۷\times۱۰^{-۱۰}\ \mathrm{F}$$

$$V_m=E_md=(۲۰۰\times۱۰^{۳})(۲\times۱۰^{-۳})=۴۰۰\mathrm{V}$$

$$U_m=\frac{۱}{۲}CV_m^۲=\frac{۱}{۲}(۸/۲۷\times۱۰^{-۱۰})(۴۰۰)^۲=۶/۶۲\times۱۰^{-۵}\ \mathrm{J}$$

۴۶●●- در شکل ۲۱-۴۶، چقدر بار توسط باتری ۱۲/۰ ولتی روی خازن‌های تخت ذخیره شده است؟ یکی از آنها با هوا، و دیگری با دی‌الکتریکی با ثابت $\kappa=۳/۰۰$ پر شده است. مساحت صفحهٔ دو خازن $۵/۰۰\times۱۰^{-۳}\mathrm{m}^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌ها ۲/۰۰mm است.



شکل ۲۱-۴۶ مسئلهٔ ۴۶

حل:

$$C_۲=\frac{\varepsilon_\circ A}{d}=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵\times۱۰^{-۳})}{۲\times۱۰^{-۳}}$$

$$=۲/۲۱\times۱۰^{-۱۱}\ F=۲۲/۱\mathrm{pF}$$

$$C_۱=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d}=\kappa C_۲=(۳)(۲/۲۱\times۱۰^{-۱۱})$$

$$=۶/۶۳\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{F}=۶۶/۳\mathrm{pF}$$

$$q_۱=C_۱V=(۶۶/۳)(۱۲)=۷۹۷/۶\mathrm{pC}$$

$$q_۲=C_۲V=(۲۲/۱)(۱۲)=۲۶۵/۲\mathrm{pC}$$

۴۷●●- SSM ILW مادهٔ معینی دارای ثابت دی‌الکتریک ۲/۸ و استحکام دی‌الکتریک ۱۸MV/m است. اگر از این ماده به عنوان دی‌الکتریک در خازن تخت استفاده شود، مساحت کمینهٔ صفحه‌های خازن باید چقدر باشد تا ظرفیت $۷/۰\times۱۰^{-۲}\mu\mathrm{F}$ به دست آید و تضمین شود که خازن می‌تواند اختلاف پتانسیل ۴/۰kV را تاب بیاورد؟

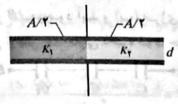
حل:

$$E_m=\frac{V_m}{d}\Rightarrow ۱۸\times۱۰^{۶}=\frac{۴\times۱۰^{۳}}{d}\Rightarrow d=۲/۲۲\times۱۰^{-۴}\ \mathrm{m}$$

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d}\Rightarrow A=\frac{Cd}{k\varepsilon_\circ}$$

$$A=\frac{(۷\times۱۰^{-۲}\times۱۰^{-۶})(۲/۲۲\times۱۰^{-۴})}{(۲/۸)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})}=۰/۶۲۷\mathrm{m}^۲$$

۴۸●●- شکل ۲۱-۴۷ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=۵/۵۶\mathrm{cm}^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های $d=۵۶/۵\ \mathrm{mm}$ را نشان می‌دهد. نیمهٔ سمت چپ فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۱=۷/۰۰$ و نیمهٔ سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۲=۱۲/۰$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۷ مسئلهٔ ۴۸

حل:

$$C_۱=\frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ A_۱}{d_۱}\ ,\ C_۲=\frac{\kappa_۲\varepsilon_\circ A_۲}{d_۲}\ ,\ A_۱=A_۲=\frac{A}{۲}$$

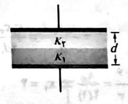
$$C_۱=\kappa_۱\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\ ,\ C_۲=\frac{\kappa_۲\varepsilon_\circ A}{۲d}\ ,\ d_۱=d_۲=d$$

چون خازن‌ها به صورت موازی بسته شده‌اند ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C=C_۱+C_۲=\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}(\kappa_۱+\kappa_۲)$$

$$=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۵/۵۶\times۱۰^{-۴})}{(۲)(۵/۵\times۱۰^{-۳})}(۷+۱۲)=۸/۴۱\times۱۰^{-۱۲}\ \mathrm{F}$$

۴۹●●- شکل ۲۱-۴۸ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=۷/۸۹\mathrm{cm}^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌ها برابر $d=۴/۶۲\ \mathrm{mm}$ را نشان می‌دهد. نیمهٔ بالایی فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۱=۱۱/۰$ و نیمهٔ پایینی آن با ماده‌ای با ثابت دی الکتریک $\kappa_۲=۱۲/۰$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



شکل ۲۱-۴۸ مسئلهٔ ۴۹

حل: روش اول: با اینکه توجیه فیزیکی تحمیلی برای در نظر گرفتن این آرایش به عنوان دو خازن متوالی نداریم با این حال به نظر می‌رسد که می‌توان این آرایش را به صورت مجموع دو خازن متوالی درنظر گرفت.

$$C_۱=\frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ A_۱}{d_۱}\ ,\ C_۲=\frac{\kappa_۲\varepsilon_\circ A_۲}{d_۲}\ ,\ A_۱=A_۲=A$$

$$C_۱=\frac{۲\kappa_۱\varepsilon_\circ A_۱}{d}\ ,\ C_۲=\frac{۲\kappa_۲\varepsilon_\circ A_۲}{d}\ ,\ d_۱=d_۲=\frac{d}{۲}$$

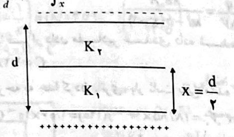
چون دو خازن به صورت متوالی درنظر گرفته شده‌اند ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{\left(\frac{۲\varepsilon_\circ A}{d}\right)^۲\kappa_۱\kappa_۲}{\left(\frac{۲\varepsilon_\circ A}{d}\right)\kappa_۱+\kappa_۲}=\frac{۲\varepsilon_\circ A}{d}\left(\frac{\kappa_۱\kappa_۲}{\kappa_۱+\kappa_۲}\right)$$

$$=\frac{(۲)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱۱)(۱۲)}{(۴/۶۲\times۱۰^{-۳})(۱۱+۱۲)}=۱/۷۳\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{F}$$

روش دوم: روش منطقی برای حل چنین مسئله‌هایی این است که ظرفیت را به روش معمول محاسبه کنیم، یعنی از تعریف ظرفیت $(C=q/\Delta V)$ استفاده کنیم در نتیجه باید ابتدا ΔV را محاسبه کرد.

$$\Delta V=-\int_d^x E_۲ds-\int_x^\circ E_۱ds$$



که داریم:

$$E_۱=\frac{E_\circ}{\kappa_۱}=\frac{q}{\kappa_۱\varepsilon_\circ A}\quad ,\ E_۲=\frac{E_\circ}{\kappa_۲}=\frac{q}{\kappa_۲\varepsilon_\circ A}$$

$$\Delta V=-\int_d^{d/۲}\frac{q}{\kappa_۲\varepsilon_\circ A}ds-\int_{d/۲}^\circ\frac{q}{\kappa_۱\varepsilon_\circ A}ds$$

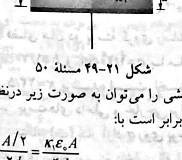
$$=-\frac{q}{\varepsilon_\circ A}\left[\frac{۱}{\kappa_۲}\left[\frac{d}{۲}-d\right]+\frac{۱}{\kappa_۱}\left(\circ-\frac{d}{۲}\right)\right]$$

$$=\frac{qd}{۲\varepsilon_\circ A}\left[\frac{\kappa_۱+\kappa_۲}{\kappa_۱\kappa_۲}\right]$$

بنا به تعریف ظرفیت داریم:

$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{۲\varepsilon_\circ A}{d}\left(\frac{k_۱k_۲}{k_۱+k_۲}\right)=۱/۷۳\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{F}$$

۵۰●●●- GO شکل ۲۱-۴۹ یک خازن تخت با مساحت صفحهٔ $A=۱۰/۵\mathrm{cm}^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های $۲d=۷/۱۲\ \mathrm{mm}$ را نشان می‌دهد. نیمهٔ سمت چپ فضای خالی میان صفحه‌ها با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۱=۲۱/۰$ و نیمهٔ بالایی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۲=۴۲/۰$، و نیمهٔ پایینی سمت راست آن با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa_۳=۵۸/۰$ پر شده است. ظرفیت این خازن چقدر است؟



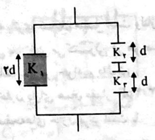
شکل ۲۱-۴۹ مسئلهٔ ۵۰

حل: چنین آرایشی را می‌توان به صورت زیر درنظر گرفت. و ظرفیت خازنها برابر است با:

$$C_۱=\kappa_۱\varepsilon_\circ\frac{A/۲}{۲d}=\frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ A}{۴d}$$

$$C_۲=\kappa_۲\varepsilon_\circ\frac{A/۲}{d}=\frac{\kappa_۲\varepsilon_\circ A}{۲d}$$

$$C_۳=\kappa_۳\varepsilon_\circ\frac{A/۲}{d}=\frac{\kappa_۳\varepsilon_\circ A}{۲d}$$



برای دو خازن متوالی $C_۲$ و $C_۳$ ظرفیت معادل برابر است با

$$C_{۲۳}=\frac{C_۲C_۳}{C_۲+C_۳}=\frac{\left(\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\right)^۲\kappa_۲\kappa_۳}{\left(\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\right)(\kappa_۲+\kappa_۳)}=\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\left(\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

$C_{۲۳}$ و $C_۱$ با هم موازی‌اند و ظرفیت معادل کل آرایش عبارت است از

$$C=C_۱+C_{۲۳}=\frac{\kappa_۱\varepsilon_\circ A}{۴d}+\frac{\varepsilon_\circ A}{۲d}\left(\frac{\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

$$=\frac{\varepsilon_\circ A}{۴d}\left(\kappa_۱+\frac{۲\kappa_۲\kappa_۳}{\kappa_۲+\kappa_۳}\right)$$

با قرار دادن مقادیر عددی خواهیم داشت

$$C=۴/۵۵\times۱۰^{-۱۱}\ \mathrm{F}$$

بخش ۲۱-۸ دی‌الکتریک و قانون گاؤس

۵۱●- SSM WWW یک خازن تخت دارای ظرفیت ۱۰۰pF، مساحت صفحهٔ $۱۰۰\mathrm{cm}^۲$، و دی الکتریکی از جنس میکا $(\kappa=۵/۴)$ است که فضای میان صفحه‌ها را به طور کامل پر کرده است. در اختلاف پتانسیل ۵۰V، (الف) بزرگی میدان الکتریکی E در میکا، (ب) بزرگی بار آزاد روی صفحه‌ها و (پ) بزرگی بار القا شده روی میکا را محاسبه کنید.

حل: (الف) برای ظرفیت داریم

$$C=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{d}\Rightarrow\quad d=\frac{\kappa\varepsilon_\circ A}{C}$$

و میدان الکتریکی برابر است با $E=V/d$ که با قرار دادن d از رابطه بالا داریم

$$E=\frac{VC}{\kappa\varepsilon_\circ A}=\frac{(۵۰)(۱۰۰\times۱۰^{-۱۲})}{(۵/۴)(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۱۰۰\times۱۰^{-۴})}$$

$$=۱\times۱۰^{۵}\ \mathrm{V/m}$$

(ب) بار آزاد روی صفحه‌ها برابر است با:

$$q_f=CV=(۱۰۰\times۱۰^{-۱۲})(۵۰)=۵\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{C}$$

(پ) بار القایی برابر است با:

$$q'=q_f\left(۱-\frac{۱}{\kappa}\right)=(۵\times۱۰^{-۹})\left(۱-\frac{۱}{۵/۴}\right)=۴\times۱۰^{-۹}\ \mathrm{C}$$

۵۲●●- در مسئلهٔ نمونهٔ ۲۱-۱۷، فرض کنید در حالی که تیغهٔ دی‌الکتریک قرار داده می‌شود، باتری متصل بماند. (الف) ظرفیت، (ب) بار روی صفحه‌های خازن، (پ) میدان الکتریکی در فضای خالی، و (ت) میدان الکتریکی در تیغهٔ را، پس از آنکه تیغهٔ قرار داده شد محاسبه کنید.

حل: در حالی که باتری کماکان متصل است ولتاژ دو سر خازن ثابت می‌ماند ولی بار تغییر می‌کند. ولی در هر صورت ظرفیت خازن ثابت می‌ماند. بنابراین خواهیم داشت:

(الف) ظرفیت خازن دارای همان مقدار $13/4\,pF$ خواهد بود.

(ب) بار روی صفحه‌های خازن برابر است با

$$q = CV_0 = (13/4\times10^{-12})(85/5) = 1/15\times10^{-9}\ C = 1/15\,nC$$

(پ) از قانون گاوس داریم:

$$\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \Rightarrow E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$

$$E_0 = \frac{1/15\times10^{-9}\ C}{(8/85\times10^{-12})(115\times10^{-4})} = 1/13\times10^{4}\ N/C$$

(ت) میدان در حضور دی‌الکتریک برابر است با

$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{1/13\times10^{4}}{2/61} = 4/32\times10^{3}\ N/C$$

۵۳●●- یک خازن تخت دارای صفحه‌هایی به مساحت $0/12\,m^2$ و فاصلهٔ $1/2\,cm$ است. یک باتری صفحه‌ها را تا اختلاف پتانسیل $120\,V$ باردار می‌کند و سپس برداشته می‌شود. آنگاه یک تیغهٔ دی‌الکتریک به ضخامت $4/0\,mm$ و ثابت دی‌الکتریک ۴/۸ به طور متقارن میان صفحه‌ها قرار داده می‌شود. (الف) پیش از آنکه تیغه قرار داده شود، ظرفیت خازن چقدر است؟ (ب) پس از آنکه تیغه قرارداده شد، ظرفیت خازن چقدر است؟ بار آزاد q (پ) پیش و (ت) پس از آنکه تیغه قرار داده شد چقدر است؟ بزرگی میدان الکتریکی (ث) در فضای میان صفحه‌ها و دی‌الکتریک و (ج) در خودِ دی الکتریک چقدر است؟ (چ) با وجود تیغه، اختلاف پتانسیل دو سر صفحه‌ها چقدر است؟ (ح) در حین قراردادن تیغه چقدر کار خارجی صورت گرفته است؟

حل: (الف) پیش از قرار دادن تیغه ظرفیت خازن برابر است با

$$C_0 = \frac{\varepsilon_0 A}{d} = \frac{(8/85\times10^{-12})(0/12)}{1/2\times10^{-2}} = 8/85\times10^{-11}\ F$$

(ب) برای به دست آوردن ظرفیت پس از قرار تیغه ابتدا اختلاف پتانسیل را محاسبه می‌کنیم (روش محاسبه ظرفیت معادل توجیه منطقی ندارد ولی پاسخ صحیح را به دست می‌دهد).

$$\Delta V = -\int_d^{b+x} E_0 dS - \int_{b+x}^{x} E dS - \int_x^0 E_0 dS$$
$$= -E_0(b+x-d) - \frac{E_0}{\kappa}[x-(b+x)] - E_0(-x)$$

$$\Delta V = -\frac{\sigma}{\varepsilon_0}\left[b-d+\frac{b}{\kappa}\right] = \frac{q}{\varepsilon_0 A}\left[\frac{\kappa d - b(\kappa-1)}{\kappa}\right]$$

حال می‌توان ظرفیت را به دست آورد:

$$C = \frac{q}{\Delta V} = \frac{k\varepsilon_0 A}{\kappa d - b(\kappa-1)}$$

که با قرار دادن مقادیر عددی داده شده داریم $C = 1/2\times10^{-10}\ F$.

(پ) با توجه به جدا کردن باتری، بار ثابت باقی مانده است

$$q = q_0 = C_0V_0 = (8/85\times10^{-11})(120) = 1/06\times10^{-8}\ C$$

(ت)
$$E_0 = \frac{V}{d} = \frac{120}{1/2\times10^{-2}} = 10^{4}\ V/m$$

(ث)
$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{10^{4}}{4/8} = 2/1\times10^{3}\ V/m$$

(ج)
$$q = CV \Rightarrow V = \frac{q}{C} = \frac{1/06\times10^{8}}{1/2\times10^{-10}} = 88/3\ V$$

(چ)
$$W_{ext} = \Delta U = \frac{q^2}{2C} - \frac{q^2}{2\varepsilon_0} = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C}-\frac{1}{C_0}\right)$$
$$= \frac{(1/06\times10^{-8})^2}{2}\left[\frac{1}{1/2\times10^{-10}} - \frac{1}{8/85\times10^{-11}}\right]$$
$$= -1/69\times10^{-7}\ J$$

۵۴●●- به دو صفحهٔ موازی به مساحت $100\,cm^2$ بارهایی به بزرگی $8/9\times10^{-7}C$ و علامت‌های مخالف داده شده‌اند. میدان الکتریکی در داخل مادهٔ دی‌الکتریکی که فضای میان صفحه‌ها را پرکرده است برابر با $1/4\times10^{6}\,V/m$ است. (الف) ثابت دی‌الکتریک این ماده را محاسبه کنید. (ب) بزرگی بار القا شده روی هر سطح دی‌الکتریک را تعیین کنید.

(الف) از قانون گاوس در دی‌الکتریک داریم

$$\kappa\varepsilon_0\oint \vec{E}\cdot d\vec{A} = q \Rightarrow \kappa\varepsilon_0 EA = q$$

$$\kappa = \frac{q}{\varepsilon_0 EA} = \frac{8/9\times10^{-7}}{(8/85\times10^{-12})(1/4\times10^{-6})(100\times10^{-4})}$$
$$= 7/18$$

(ب)
$$q' = q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) = (8/9\times10^{-7})\left(1-\frac{1}{7/18}\right)$$
$$= 7/66\times10^{-7}\ C$$

۵۵●●- SSM فضای میان دو پوستهٔ کروی رسانای هم‌مرکز به شعاع‌های $b=1/70\,cm$ و $a=1/20\,cm$ با ماده‌ای با ثابت دی‌الکتریک $\kappa=23/5$ پرشده است. اختلاف پتانسیل $V=73/0\,V$ بین پوسته‌های داخلی و خارجی برقرار شده است. (الف) ظرفیت دستگاه، (ب) بار آزاد q روی پوستهٔ داخلی، و (پ) بار q' که روی سطح پوستهٔ داخلی القا شده است را تعیین کنید.

حل: (الف) در اینجا خازن کروی داریم و ظرفیت خازن کروی از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$C = \frac{4\pi\kappa\varepsilon_0 ab}{b-a} = \frac{\kappa(ab)}{\kappa(b-a)}$$

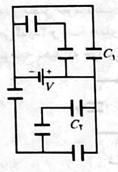
$$= \frac{(23/5)(1/2\times10^{-2})(1/7\times10^{-2})}{(9\times10^{9})(1/7-1/2)\times10^{-2}} = 1/1\times10^{-10}\ F$$

(ب)
$$q = CV = (1/1\times10^{-10})(73) = 8/03\times10^{-9}\ C$$

(پ)
$$q' = q\left(1-\frac{1}{\kappa}\right) = (8/03\times10^{-9})\left(1-\frac{1}{23/5}\right)$$
$$= 7/69\times10^{-9}\ C$$

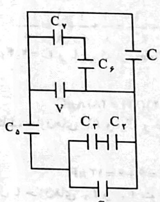
مسئله‌های اضافی

۵۶- در شکل ۲۱-۵۰، اختلاف پتانسیل V باتری برابر با $10/0\,\mu F$، و ظرفیت هر یک از هفت خازن برابر با $10/0\,\mu F$ است. بار روی (الف) خازن ۱ و (ب) خازن ۲ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۰ مسئلهٔ ۵۶

حل:



(الف)
$$V_1 = V = 10\ V$$

$$q_1 = C_1V_1 = (10)(10) = 100\,\mu C$$

(ب)
$$C_{23} = \frac{10}{2} = 5\,\mu F$$

$$C_{234} = C_{23} + C_4 = 5 + 10 = 15\,\mu F$$

خازن معادل مجموعه پایین را می‌توان به دست آورد.

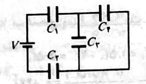
$$C_{eq} = \frac{C_5C_{234}}{C_5+C_{234}} = \frac{(10)(15)}{10+15} = 6\,\mu F$$

$$q_{eq} = q_5 = q_{234} = C_{eq}V = (6)(10) = 60\,\mu F$$

$$V_4 = V_{23} = \frac{q_{234}}{C_{234}} = \frac{60}{15} = 4\ V$$

$$q_2 = q_{23} = C_{23}V_{23} = (5)(4) = 20\,\mu C$$

۵۷- SSM در شکل ۲۱-۵۱، $V=9/0\,V$ ، $C_1=C_2=30\,\mu F$ ، و $C_3=C_4=15\,\mu F$ است. بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۱ مسئلهٔ ۵۷

حل:

$$C_{34} = C_3 + C_4 = 30\,\mu F$$

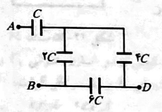
$$\frac{1}{C_{eq}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_{34}} = \frac{1}{30} + \frac{1}{30} + \frac{1}{30} \Rightarrow C_{eq} = 10\,\mu F$$

$$q_{eq} = q_{34} = C_{eq}V = (10)(9) = 90\,\mu C$$

$$V_3 = V_4 = \frac{q_{34}}{C_{34}} = \frac{90}{30} = 3\ V$$

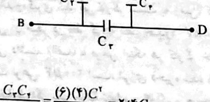
$$q_4 = C_4V_4 = (15)(3) = 45\,\mu C$$

۵۸- ظرفیت‌های چهار خازن نشان‌داده شده در شکل ۲۱-۵۲ برحسب کمیت معین C داده شده‌اند. (الف) اگر $C=50\,\mu F$ باشد، ظرفیت معادل میان نقطه‌های A و B چقدر است؟ (*راهنمایی:* نخست تصور کنید که یک باتری میان این دو نقطه وصل شده است؛ سپس مدار را به یک ظرفیت معادل تبدیل کنید.) (ب) این کار را برای نقطه‌های A و D تکرار کنید.



شکل ۲۱-۵۲ مسئلهٔ ۵۸

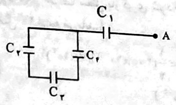
حل: (الف) از دیدگاه ورودی‌های A و B مدار به صورت زیر است:



داریم:

$$C_{34} = \frac{C_3C_4}{C_3+C_4} = \frac{(6)(4)C^2}{6C+6C} = 2/4C$$
$$C_{234} = C_2 + C_{34} = 2C + 2/4C = 4/4C$$
$$C_{eq} = \frac{C_1C_{234}}{C_1+C_{234}} = \frac{(C)(4/4C)}{C+4/4C} = 0/81C$$
$$= (0/81)(50) = 40/5\,\mu F$$

(ب) از دیدگاه ورودی‌های A و D مدار به صورت زیر است:



داریم:

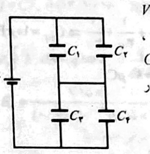
$$C_{23}=\frac{C_2C_3}{C_2+C_3}=\frac{(2C)(6C)}{2C+6C}=1.5C$$

$$C_{234}=C_{23}+C_4=1.5C+4C=5.5C$$

$$C_{eq}=\frac{C_1C_{234}}{C_1+C_{234}}=\frac{(C)(5.5C)}{C+5.5C}=0.846C$$

$$=(0.846)(50)=42.3\,\mu C$$

۵۹- در شکل ۲۱-۵۳، $V=12V$، $C_1=C_4=2.0\,\mu F$، $C_2=4.0\,\mu F$ و $C_3=1.0\,\mu F$ است. بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۳ مسئلهٔ ۵۹

حل:
$C_{12}=C_1+C_2=6\,\mu F \quad C_{34}=C_3+C_4=3\,\mu F$

$$C_{eq}=\frac{C_{12}C_{34}}{C_{12}+C_{34}}=\frac{(6)(3)}{6+3}=2\,\mu F$$

$$q_{eq}=C_{eq}V=(2)(12)=24\,\mu C$$

$$q_{34}=q_{eq}=24\,\mu C$$

$$V_{34}=V_3=V_4=\frac{q_{34}}{C_{34}}=8V$$

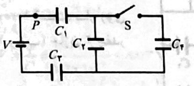
$$q_4=C_4V_4=(2)(8)=16\,\mu C$$

۶۰- [redacted] *معمای خرده‌های شکلات.* این داستان با مسئلهٔ ۶۰ فصل ۱۹ شروع شده است. به عنوان بخشی از بررسی‌ها در مورد دلایل انفجار کارخانهٔ بیسکویت‌سازی، پتانسیل الکتریکی کارگران در هنگام تخلیهٔ بسته‌های پودر شکلات به داخل سطل بارگیری که باعث به وجود آمدن ابری از پودر در اطراف آنها می‌شد، اندازه‌گیری شد. هر کارگر نسبت به زمین، که پتانسیل الکتریکی آن صفر در نظر گرفته شد، حدود $7.0\,kV$ پتانسیل الکتریکی داشت. (الف) با فرض اینکه هر کارگر خازن مؤثری با ظرفیت نوعی $200\,\mu F$ است، انرژی ذخیره شده در این خازن مؤثر را بیابید. اگر یک جرقهٔ تنها بین کارگر و هرجسم رسانای متصل به زمین زده شود، کارگر از لحاظ بار خنثی می‌شود و این انرژی به جرقه منتقل می‌گردد. بنا بر اندازه‌گیری‌های انجام شده، انرژی جرقه‌ای که بتواند باعث آتش گرفتن ابری از پودر خرده‌های شکلات و در نتیجه، انفجار شود باید دست کم $150\,mJ$ باشد. (ب) آیا جرقه‌ای از یک کارگر می‌توانست باعث انفجار در ابر پودرهای اطراف سطل بارگیری شود؟ (این داستان با مسئلهٔ ۵۶ فصل ۲۲ ادامه می‌یابد.)

حل: (الف) $U=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}(200\times10^{-12})(7\times10^3)^2$
$=4.9\times10^{-3}\,J$

(ب) چون انرژی آزاد شده به ازای هر تک جرقه توسط یک کارگر بسیار کمتر از انرژی لازم برای انفجار است لذا جرقهٔ ناشی از طرف یک نفر باعث انفجار نمی‌شود.

۶۱- شکل ۲۱-۵۴، خازن ۱ ($C_1=8.00\,\mu F$)، خازن ۲ ($C_2=6.00\,\mu F$)، و خازن ۳ ($C_3=8.00\,\mu F$) را نشان می‌دهد که به یک باتری $12.0V$ متصل شده‌اند. وقتی کلید S بسته شده و در نتیجه خازن بدون بار ۴ ($C_4=6.00\,\mu F$) به مدار متصل شود، (الف) چقدر بار به وسیلهٔ باتری از نقطهٔ P می‌گذرد؟ و (ب) چقدر بار روی خازن ۴ ظاهر می‌شود؟ (پ) توضیح دهید که چرا این دو نتیجه، متفاوت‌اند؟



شکل ۲۱-۵۴ مسئلهٔ ۶۱

حل: (الف) پیش از اتصال کلید خازن‌های C_1، C_2 و C_3 متولی و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$\frac{1}{C}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\frac{1}{C_3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{10}{24}$$

که در نتیجه $C=2.4\,\mu F$ و باری که از نقطه P می‌گذرد برابر است با

$$q_i=CV=(2.4)(12)=28.8\,\mu C$$

پس از اتصال کلید، خازن‌های C_2 و C_4 و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$C_{24}=C_2+C_4=6+6=12\,\mu F$$

این خازن معادل با خازن‌های C_1 و C_3 متوالی است و ظرفیت معادل آنها برابر است با

$$\frac{1}{C'}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{24}}+\frac{1}{C_3}=\frac{1}{8}+\frac{1}{12}+\frac{1}{8}$$

که در نتیجه $C'=3\,\mu F$ و داریم

$$q_f=C'V=(3)(12)=36\,\mu F$$

به این ترتیب باری که پس از اتصال کلید از نقطهٔ P می‌گذرد برابر است با

$$\Delta q=q_f-q_i=36-28.8=7.2\,\mu C$$

(ب) $V_{24}=\frac{q_f}{V_{24}}=\frac{36}{12}=3V$

که این همان اختلاف پتانسیل دو سر خازن‌های C_2 و C_4 است لذا بار روی خازن C_4 برابر است با:

$$q_4=C_4V_{24}=(6)(3)=18\,\mu C$$

(پ) وقتی که خازن C_4 به مدار افزوده می‌شود توسط سایر خازنها تغذیه شده و بار خازنهای دیگر در مدار تغییر می‌کند. باتری صفحاتی را که به آن متصل است تغذیه می‌کند.

۶۲- دو خازن تخت، پر از هوا، نخست به طور مجزا، سپس به طور متوالی، و سرانجام به طور موازی به یک باتری $10V$ بسته

می‌شوند. در این آرایش‌ها، انرژی ذخیره شده در خازن‌ها از کمترین تا بیشترین عبارت‌اند از: $75\,\mu J$، $100\,\mu J$، $300\,\mu J$، و $400\,\mu J$. ظرفیت (الف) کمتر و (ب) بیشتر این دو خازن چقدر است؟

حل: می‌دانیم که در اتصال متوالی ظرفیت معادل کوچکتر از هر تک خازن است در نتیجه انرژی نیز همین وضعیت را دارد. در اتصال موازی ظرفیت معادل بزرگتر از هر تک خازن است. در نتیجه انرژی نیز همین وضعیت را دارد. لذا دو مقدار میانی داده شده مربوط به خازنهای C_1 و C_2 هستند و در نتیجه داریم:

$$W_1=\frac{1}{2}C_1V^2\Rightarrow 100=\frac{1}{2}C_1(10)^2\Rightarrow C_1=2\,\mu F$$

$$W_2=\frac{1}{2}C_2V^2\Rightarrow 300=\frac{1}{2}C_2(10)^2\Rightarrow C_2=6\,\mu F$$

۶۳- دو خازن تخت، هریک به ظرفیت $6.0\,\mu F$، به طور متوالی به یک باتری $10V$ بسته شده‌اند. سپس یکی از خازن‌ها فشرده می‌شود، به طوری که فاصلهٔ صفحه‌های آن به نصف می‌رسد. بر اثر این فشردگی، (الف) چقدر بار اضافی توسط باتری به خازن‌ها منتقل می‌شود؟ و (ب) افزایش بار *کل* ذخیره شده در خازن‌ها (بار روی صفحهٔ مثبت یک خازن به علاوهٔ بار روی صفحهٔ مثبت خازن دیگر) چقدر می‌شود؟

حل: وقتی خازن‌ها به باتری وصل‌اند ولتاژ آنها ثابت می‌ماند ولی بار روی آنها تغییر می‌کند. ابتدا خازن معادل را به دست می‌آوریم

$$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\frac{(6)(6)}{6+6}=3\,\mu F$$

بار قبل از فشردگی برابر است با:

$$q_i=C_{eq}V=(3)(10)=30\,\mu C$$

پس از فشردگی و نصف شدن فاصله صفحه‌ها ظرفیت دو برابر می‌شود یعنی $C'_2=12\mu C$. و ظرفیت معادل جدید برابر است با

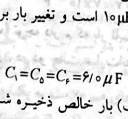
$$C'_{eq}=\frac{C_1C'_2}{C_1+C'_2}=\frac{(6)(12)}{6+12}=4\,\mu F$$

و
$$q_f=C'_{eq}V=(4)(10)=40\,\mu C$$

(الف) $\Delta q=q_f-q_i=40-30=10\,\mu C$

(ب) می‌دانیم که در بهم بستن متوالی بار روی خازن‌ها یکسان است لذا تغییر بار هر خازن همان $10\mu F$ است و تغییر بار برای دو خازن $20\mu C$ است.

۶۴- در شکل ۲۱-۵۵، $V=12V$، $C_1=C_5=C_6=6.0\,\mu F$، و $C_2=C_3=C_4=4.0\,\mu F$ است. (الف) بار خالص ذخیره شده روی خازنها و (ب) بار روی خازن ۴ چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۵ مسئلهٔ ۶۴

حل: باید ابتدا خازن معادل مدار را محاسبه کنیم و سپس بار خالص ذخیره شده روی خازن‌ها را را بدست آوریم.

$$C_{234}=C_2+C_3+C_4=12\,\mu F$$

$$C_{56}=C_5+c_6=12\,\mu F$$

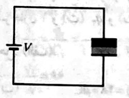
$$\frac{1}{C_{eq}}=\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_{234}}+\frac{1}{C_{56}}\Rightarrow C_{eq}=3\,\mu F$$

(الف) $q_{eq}=C_{eq}V=(3)(12)=36\,\mu F$

$$q_{234}=q_{eq}=36\,\mu C$$

(ب) $q_4=q_3=q_2=\frac{q_{234}}{3}=12\,\mu F$

۶۵- SSM در شکل ۲۱-۵۶، یک خازن تخت به مساحت صفحه $2.00\times10^{-2}\,m^2$ با دو تیغهٔ دی‌الکتریک، هر یک به ضخامت $2.00\,mm$ پرشده است. ثابت دی‌الکتریک یکی از تیغه‌ها 3.00 و دیگری 4.00 است. باتری $7.00V$ چقدر بار روی خازن ذخیره می‌کند؟



شکل ۲۱-۵۶ مسئلهٔ ۶۵

حل: این آرایش را می‌توان ترکیبی از دو خازن متوالی C_1 و C_2 با دی‌الکتریک‌هایی با ثابت‌های k_1 و k_2 در نظر گرفت.

$$C_1=\frac{\kappa_1\varepsilon_0A}{d/2}=\frac{2\kappa_1\varepsilon_0A}{d}$$

$$C_2=\frac{\kappa_2\varepsilon_0A}{d/2}=\frac{2\kappa_2\varepsilon_0A}{d}$$

$$C_{eq}=\frac{C_1C_2}{C_1+C_2}=\left(\frac{\kappa_1\kappa_2}{\kappa_1+\kappa_2}\right)\left(\frac{2\varepsilon_0A}{d}\right)$$

$$=\left(\frac{3\times4}{3+4}\right)\frac{(2)(8.85\times10^{-12})(2\times10^{-2})}{4\times10^{-3}}=1.52\times10^{-10}\,F$$

بنابراین باری که روی خازن ذخیره می‌شود برابر است با

$$q=C_{eq}V=(1.52\times10^{-10})(7)=1.06\times10^{-9}\,C$$

۶۶- یک خازن استوانه‌ای، مشابه شکل ۲۱-۶ دارای شعاع‌های a و b است. نشان دهید که نیمی از انرژی پتانسیل الکتریکی در داخل استوانه‌ای به شعاع $r=\sqrt{ab}$ ذخیره شده است.

حل: با استفاده از قانون گاوس، میدان بین دو پوسته رسانای خازن استوانه‌ایی برابر است با $E=\frac{q}{2\pi\varepsilon_0Lr^2}$ لذا داریم

$$u=\frac{1}{2}\varepsilon_0E^2=\frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0L^2r^2}$$

و انرژی ذخیره شده بین دو پوسته برابر است با

$$U=\int u\,dV=\int_a^b\frac{q^2}{8\pi^2\varepsilon_0L^2r^2}(2\pi r\,dr\,L)$$

$$=\frac{q^2}{4\pi\varepsilon_0L}Ln\frac{b}{a}$$

انرژی ذخیره شده از $r=a$ تا r برابر است $U_r=\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ L}Ln\frac{r}{a}$، با توجه به صورت مسئله شرط $U_r=\frac{۱}{۲}U$ طبق عملیات به دست می‌آید.

$$\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ L}Ln\frac{r}{a}=\left(\frac{۱}{۲}\right)\left(\frac{q^۲}{۴\pi\varepsilon_۰ L}\right)Ln\frac{b}{a}$$
$$\Rightarrow Ln\frac{r}{a}=\frac{۱}{۲}Ln\frac{b}{a}=Ln\sqrt{\frac{b}{a}}\Rightarrow\frac{r}{a}=\sqrt{\frac{b}{a}}$$
$$\Rightarrow r=\sqrt{ab}$$

۶۷- خازنی به ظرفیت $C_۱=۶/۰۰\mu F$ به طور متوالی به خازنی با ظرفیت $C_۲=۴/۰۰\mu F$ بسته شده و اختلاف پتانسیل ۲۰۰ V به دو سر این دو اعمال شده است. (الف) ظرفیت معادل را محاسبه کنید. (ب) بار $q_۱$ و (پ) اختلاف پتانسیل $V_۱$ دو سرخازن ۱ و (ت) $q_۲$ و (ث) $V_۲$ دو سرخازن ۲ چقدر است؟

حل: (الف) $C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۶)(۴)}{۶+۴}=۲/۴\mu F$

(ب) $q_۱=q_{eq}=C_{eq}V_{باتری}=(۲/۴)(۲۰۰)=۴۸۰\mu C$

(پ) $V_۱=\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{۴۸۰}{۶}=۸۰V$

(ت) $q_۲=q_{eq}=۴۸۰\mu C$

(ث) $V_۲=\frac{q_۲}{C_۲}=\frac{۴۸۰}{۴}=۱۲۰V$

۶۸- مسئلهٔ ۶۷ را برای همان دو خازن، که اینک به طور موازی بسته شده‌اند تکرار کنید.

حل: (الف) $C_{eq}=C_۱+C_۲=۶+۴=۱۰\mu F$

(ب) $q_۱=C_۱V_{باتری}=(۶)(۲۰۰)=۱۲۰۰\mu C$

(پ) $V_۱=V_۲=V_{باتری}=۲۰۰V$

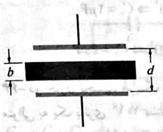
(ت) $q_۲=C_۲V_{باتری}=(۴)(۲۰۰)=۸۰۰\mu C$

(ث) $V_۲=۲۰۰V$

۶۹- خازن معینی را تا اختلاف پتانسیل V باردار می‌کنیم. اگر بخواهیم انرژی ذخیره شده در خازن را به میزان ٪۱۰ افزایش دهیم، V را باید چند درصد افزایش دهیم؟

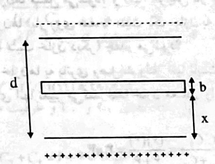
حل:
$$U=\frac{۱}{۲}CV^۲$$
$$U+\Delta U=\frac{۱}{۲}C(V+\Delta V)^۲$$
$$\frac{U+\Delta U}{U}=\frac{\frac{۱}{۲}C(V+\Delta V)^۲}{\frac{۱}{۲}CV^۲}$$
$$۱+\frac{\Delta U}{U}=\left(۱+\frac{\Delta V}{V}\right)^۲\Rightarrow$$
$$۱+۰/۱=\left(۱+\frac{\Delta V}{V}\right)^۲\Rightarrow\frac{\Delta V}{V}=۰/۰۴۹ \quad \text{یا} \quad ٪۴/۹$$

۷۰- همان‌گونه که در شکل ۲۱-۵۷ نشان داده شده است، یک تیغهٔ مسی به ضخامت $b=۲/۰۰mm$ داخل یک خازن تخت به مساحت صفحهٔ $A=۲/۴۰cm^۲$ و فاصلهٔ صفحه‌های $d=۵/۰۰mm$ قرار داده شده است؛ تیغه دقیقاً در بین دو صفحه قرار دارد. (الف) ظرفیت خازن پس از آنکه تیغه گذاشته شود چقدر است؟ (ب) اگر بار $q=۳/۴۰\mu C$ روی صفحه‌ها بدون تغییر باقی بماند، نسبت انرژی ذخیره شده پیش از قرار دادن تیغه به مقدار آن پس از قرار دادن تیغه چقدر است؟ (پ) موقع قرار دادن تیغه چقدر کار انجام شده است؟ (ت) آیا تیغه به داخل صفحه‌ها کشیده می‌شود یا باید آن را هل داد؟



شکل ۲۱-۵۷ مسئلهٔ ۷۰ و ۷۱

حل:



$$\Delta V=-\int_d^{b+x}E_۰dS-\int_{b+x}^{x}EdS-\int_x^۰E_۰dS$$

که در آن $E_۰=\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}$ و $E=۰$ در نتیجه داریم:

$$\Delta V=-\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}(b+x-d)-۰-\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}(۰-x)=\frac{\sigma}{\varepsilon_۰}(d-b)$$
$$\Delta V=\frac{q}{\varepsilon_۰A}(d-b)$$
$$C=\frac{q}{\Delta V}=\frac{q}{\frac{q}{\varepsilon_۰A}(d-b)}=\frac{\varepsilon_۰A}{d-b}$$
$$=\frac{(۸/۸۵\times۱۰^{-۱۲})(۲/۴\times۱۰^{-۴})}{۳\times۱۰^{-۳}}=۷/۰۷\times۱۰^{-۱۳}F$$

(ب) توجه داریم که بار ثابت می‌ماند، انرژی ذخیره شده در خازن در دو حالت عبارت‌اند از:

$$C_i=\frac{\varepsilon_۰A}{d}$$
$$U_i=\frac{q^۲}{۲C_i}=\frac{q^۲d}{۲\varepsilon_۰A}=۱۳/۶۱J$$
$$C_f=\frac{\varepsilon_۰A}{d-b}$$
$$U_f=\frac{q^۲}{۲C_f}=\frac{q^۲(d-b)}{۲\varepsilon_۰A}=۸/۱۶J$$
$$\frac{U_i}{U_f}=\frac{۱۳/۶۱}{۸/۱۶}=۱/۶۷$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W=\Delta V=U_f-U_i=۸/۱۶-۱۳/۶۱=-۵/۴۴J$$

(ت) چون کار منفی است، لذا برای داخل کردن تیغه نه تنها انرژی از خارج سیستم صرف نمی‌شود بلکه مقداری انرژی نیز آزاد می‌شود یا به بیان دیگر تیغه به درون صفحات کشیده می‌شود.

۷۱- مسئلهٔ ۷۰ را این بار با این فرض که اختلاف پتانسیل $V=۸۵/۰V$ به جای بار ثابت بماند، تکرار کنید.

حل: (الف) ظرفیت خازن مقدار مشخصی است و تغییر نمی‌کند.

(ب)
$$\frac{U_i}{U_f}=\frac{\frac{۱}{۲}C_iV^۲}{\frac{۱}{۲}C_fV^۲}=\frac{C_i}{C_f}=\frac{\frac{\varepsilon_۰A}{d}}{\frac{\varepsilon_۰A}{(d-b)}}=\frac{d-b}{d}$$
$$=\frac{۵-۲}{۵}=۰/۶$$

(پ) کار انجام شده برابر است با

$$W=\Delta U=U_f-U_i=\frac{۱}{۲}(C_f-C_i)V^۲$$
$$=\frac{\varepsilon_۰A}{۲}\left(\frac{۱}{d-b}-\frac{۱}{d}\right)V^۲$$

که با قرار دادن مقادیر داده شده داریم $W=۱/۰۲\times۱۰^{-۹}J$.

(ت) چون کار مثبت است لذا تیغه را باید با صرف نیرو به داخل صفحات وارد نمود. البته می‌توان تفسیر دیگری را انجام داد و تفسیر کرد که با آنکه کار مثبت است ولی باز تیغه به درون کشیده می‌شود. در مسئله ۷۴ که خازن از باتری قطع شد و تیغه به داخل کشیده شد F دقیقاً با $-dU/dx$ داده می‌شود. ولی وقتی باتری قطع نشده باشد این رابطه برقرار نیست چون در این حالت نیروی وارد بر تیغه پایستار نیست و در اینجا این توزیع بار در تیغه است که باعث می‌شود تیغه به فضای میان صفحه‌های خازن کشیده شود و این عمل باعث افزایش انرژی پتانسیل ذخیره شده توسط باتری در خازن می‌شود.

۷۲- اختلاف پتانسیل ۳۰۰V به دو سر یک ترکیب متوالی شامل دو خازن با ظرفیت‌های $C_۱=۲/۰۰\mu F$ و $C_۲=۸/۰۰\mu F$ اعمال شده است. (الف) بار $q_۱$ و (ب) اختلاف پتانسیل $V_۱$ دو سر خازن ۱ و (پ) $q_۲$ و (ت) $V_۲$ دو سر خازن ۲ چقدر است؟ سپس خازن‌های *باردار شده* را از یکدیگر و از باتری جدا می‌کنیم. آنگاه با اتصال صفحه‌های هم *علامت* به یکدیگر، خازن‌ها را دوباره به هم وصل می‌کنیم (از باتری استفاده نمی‌شود). اکنون (ث) $q_۱$، (ج) $V_۱$، (چ) $q_۲$، و (ح) $V_۲$ چقدرند؟ *به جای این* فرض کنید که خازن‌های باردار شده در قسمت (الف) را با اتصال صفحه‌های با *علامت مخالف*، دوباره

به هم متصل کنیم. اکنون (خ) $q_۱$، (د) $V_۱$، (ذ) $q_۲$، و (ر) $V_۲$ چقدرند؟

حل: با محاسبه ظرفیت معادل می‌توان بار کل و بار روی هر خازن را به دست آورد.

$$C_{eq}=\frac{C_۱C_۲}{C_۱+C_۲}=\frac{(۲)(۸)}{۲+۸}=۱/۶\mu F$$
$$q_{کل}=q_۱=q_۲=C_{eq}V=(۱/۶)(۳۰۰)=۴۸۰\mu C$$

(الف) و (ب) $q_۱=۴۸۰\mu C$

$$V_۱=\frac{q_۱}{C_۱}=\frac{۴۸۰}{۲}=۲۴۰V$$

(پ) و (ت) $q_۲=۴۸۰\mu C$

$$V_۲=\frac{q_۲}{C_۲}=\frac{۴۸۰}{۸}=۶۰V$$

پس از اتصال، بار کل روی مجموعه خازنها برابر است با

$$q'_{کل}=q_۱+q_۲=۴۸۰+۴۸۰=۹۶۰\mu C$$
$$V'=\frac{q'_۱}{C_۱}=\frac{q'_۲}{C_۲}=\frac{q}{C_۱+C_۲}=\frac{۹۶۰}{۲+۸}=۹۶V$$

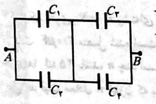
(ث) تا (ح) $\frac{q'_۱}{۲}=\frac{q'_۲}{۸}=۹۶$

$q'_۱=۱۹۲\mu C \qquad V'_۱=۹۶V$

$q'_۲=۷۶۸\mu C \qquad V'_۲=۹۶V$

$q=۰ \qquad q'_۱=q'_۲=۰ \qquad V'_۱=V_۲=۰$

۷۳- شکل ۲۱-۵۸ آرایشی شامل چهار خازن را نشان می‌دهد که در نقطه‌های A و B به مدار بزرگتری وصل شده‌اند. ظرفیت‌ها عبارت‌اند از $C_۱=۱۰\mu F$ و $C_۲=C_۳=C_۴=۲۰\mu F$. بار روی خازن ۱ برابر با ۳۰μC است. بزرگی اختلاف پتانسیل V_A-V_B چقدر است؟



شکل ۲۱-۵۸ مسئلهٔ ۷۳

حل:
$$C_{۱۲}=C_۱+C_۲=۱۰+۲۰=۳۰\mu F$$
$$V_{۱۲}=V_۱=\frac{q_۱}{C}=\frac{۳۰}{۱۰}=۳V$$
$$q_{۱۲}=C_{۱۲}V_{۱۲}=(۳۰)(۳)=۹۰\mu C$$
$$C_{۳۴}=C_۳+C_۴=۲۰+۲۰=۴۰\mu F$$
$$q_{۳۴}=q_{۱۲}=۹۰\mu C$$
$$V_{۳۴}=\frac{q_{۳۴}}{C_{۳۴}}=\frac{۹۰}{۴۰}=۲/۲۵V$$
$$V_A-V_B=V_{۱۲}+V_{۳۴}=۳+۲/۲۵=۵/۲۵V$$

۷۴- دو صفحهٔ مسی، یک ورقهٔ میکا (به ضخامت ۰/۱۰mm ، $\kappa=۵/۴$)، یک ورقهٔ شیشه‌ای (به ضخامت ۲/۰mm ، $\kappa=۷/۰$)، و یک تیغهٔ پارافین (به ضخامت ۱/۰cm ، $\kappa=۲/۰$) در اختیار داریم. برای ساختن یک خازن تخت با